全國公私立高級中學

101 學年度指定科目第五次聯合模擬考試

考試日期：102 年 3 月 4~5 日

數學乙

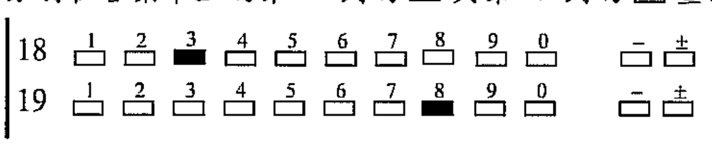
—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

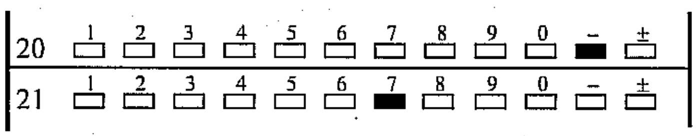
作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：



第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 74 分)

一、單選題 (占 18 分)

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(塡)題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 坐標平面上，有一等腰直角三角形 ABC，其中 $\angle BAC=90^\circ$。已知坐標 $A(0,0)$，$B(2,4)$，點 C 在第二象限內，則直線 BC 的方程式爲何？

(1) $3x-y+10=0$　(2) $3x-y-10=0$　(3) $3x+y+10=0$
(4) $x-3y+10=0$　(5) $x-3y-10=0$

2. 設 a,b 都是自然數，且 a^{50} 是 42 位數，$(\frac{1}{b})^{50}$ 所表示的小數在小數點以後有連續的 35 個零(第 36 個數字不爲零)，則 $(ab)^{10}$ 爲幾位數？

(1) 14 位數　(2) 15 位數　(3) 16 位數
(4) 17 位數　(5) 18 位數

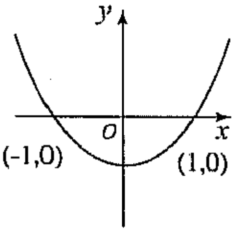
3. 有 24 塊不一樣的積木，每個積木可分爲 2 種材質(塑膠、木塊)，2 種尺寸(大、小)，2 種顏色(藍、黃)，和 3 種形狀(圓形、正方形、三角形)。試問在這堆積木中，跟“大塑膠藍色圓形積木”恰好有二個不同地方的積木有幾塊？(例如：小木塊藍色圓形積木，就是其中之一)

(1) 6　(2) 9　(3) 12
(4) 15　(5) 18

二、多選題 (占 32 分)

說明：第 4 題至第 7 題，每題有 4 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4 分；答錯多於 1 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 設 $y=ax^2+bx+c$ 之圖形如右，則下列哪些選項是正確的？



(1) $a<0$

(2) $b>0$

(3) $b^2-4ac=0$

(4) $\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c<0$

5. 假設 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ 皆為轉移矩陣(即每行之和皆為 1)，試問下列哪些選項是正確的？

(1) AB為轉移矩陣

(2) A^2為轉移矩陣

(3) A^{-1}存在

(4) $AB=BA$

6. 若要求全班 40 個同學每人模擬「投擲一個銅板 20 次」的試驗，並計算擲出正面的比例，以及求出信心水準為 95%的信賴區間。若其中甲同學做出的區間為[0.33, 0.77]，而乙同學做出的區間為[0.44, 0.86]，試問下列敘述何者正確？
   (1) 由甲所得到的信賴區間可知，甲模擬投擲銅板 20 次，得到 11 次正面
   (2) 因乙所求出的區間長度較短，所以乙做的模擬較準確
   (3) 若甲增加模擬投擲銅板到 100 次，則其求出的信賴區間長度會縮短
   (4) 若全班再做此試驗一次，所得到的 40 個 95%的信賴區間裡，其中涵蓋理論值 0.5 的區間個數期望值約為 38 個

7. 農委會調查若干個鄉鎮的農業發展，根據農地某種作物的單位收穫量 Y(公噸)對溫度 X($^\circ C$)的關係，得到 200 筆(X,Y)資料，並計算出其迴歸直線方程式為：$Y=35+0.5X$，則下列選項何者推論是正確的？
   (1) 收穫量 Y 與溫度 X 是正相關
   (2) 若已知收穫量 Y 的標準差為 5(公噸)，溫度 X 的標準差為 7($^\circ C$)，則在單位不變的情形下，收穫量 Y 與溫度 X 的相關係數為 0.5
   (3) 直線 $Y=35+0.5X$ 代表 200 個點(X,Y)到此直線的距離和為最小
   (4) 若已知溫度 10($^\circ C$)，則可利用 $Y=35+0.5X$ 來預測單位收穫量為 40(公噸)

三、選填題 (占24分)

說明：1.第A至C題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(8–18)。
2.每題完全答對給8分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 下表爲學生近視狀況之調查：表中數字表示其占全部人數的比例：

	國小	國中	高中
未患有近視	9%	3%	1%
患有近視	25%	27%	35%

若隨機抽取一名學生，則在已知患有近視的情況下，該生是高中生的機率爲 $\dfrac{⑧⑨}{⑩⑪}$ 。

B. 已知凸四邊形 $ABCD$ 之面積爲 $\dfrac{87}{2}$，且 $\overrightarrow{AC}=(6,11)$，$\overrightarrow{AB}=(3,6)$，$\overrightarrow{DA}=(3x,2x)$。若 x 爲負實數，則 $\overrightarrow{DA}=($ ⑫⑬⑭ , ⑮⑯ $)$。

C. 試求 $4(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4})^3-2(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4})^2-3(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4})$ 之值爲⑰⑱。

－－－－－－－ 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 －－－－－－

第貳部分：非選擇題(占 26 分)

説明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號(一、二)與子題號((1)、(2))，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、設方程式 $2x^2-7x+4=0$ 之二根爲 $\log_4\alpha$、$\log_4\beta$，試求下列各式之值：

(1) $\alpha\beta$。(7 分)

(2) $(\log_4\alpha)^2+(\log_4\beta)^2$。(7 分)

二、某手機品牌公司生產 A、B 兩款智慧型手機。A 款智慧型手機所需要之原料成本爲 2000 元，再經過組裝及設計後的加工成本爲 4000 元，每賣出一台其利潤爲 6000 元；B 款智慧型手機所需要之原料成本爲 4000 元，再經過組裝及設計後的加工成本爲 2000 元，每賣出一台其利潤爲 8000 元。若要使原料成本不超過 8 百萬元，加工成本不超過 1 千萬元，試問應生產多少支 A 款智慧型手機及 B 款智慧型手機，才可以使得公司有最大利潤，並求其最大利潤爲多少元？(12 分)

全國公私立高級中學101學年度指定科目第五次聯合模擬考試
數學乙考科解析

考試日期：102年3月4~5日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	3	2	4	12	134	14	3	5	8	7	－	1	2	－
16	17	18												
8	－	1												

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 令 $C(x,y)$

$\overline{CA}=\overline{BA}\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{20}\Rightarrow x^2+y^2=20\cdots①$

CA 直線斜率爲 $\dfrac{y}{x}$，BA 直線斜率爲 2

又 $\angle BAC=90^\circ$，所以 $\overline{CA}\perp\overline{BA}\Rightarrow\dfrac{y}{x}\times2=-1\Rightarrow x=-2y\cdots②$

由①②知 $\begin{cases}x^2+y^2=20\\x=-2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-4\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$，

所以 $C(-4,2)$ 或 $C(4,-2)$

但 C 在第二象限內，所以 C 爲 $(-4,2)$。

故 BC 直線方程式爲 $y-4=\dfrac{2-4}{-4-2}(x-2)\Rightarrow x-3y+10=0$

故選(4)

2. $10^{41}\le a^{50}<10^{42}\Rightarrow10^{8.2}\le a^{10}<10^{8.4}$

$\Rightarrow8.2\le10\log a<8.4\cdots①$

$10^{-36}<(\frac{1}{b})^{50}\le10^{-35}\Rightarrow10^{35}\le b^{50}<10^{36}$

$\Rightarrow10^7\le b^{10}<10^{7.2}\Rightarrow7\le10\log b<7.2\cdots②$

由①、②知 $15.2\le10(\log a+\log b)<15.6$

$\Rightarrow15.2\le\log(ab)^{10}<15.6\Rightarrow10^{15.2}\le(ab)^{10}<10^{15.6}$

故選(3)

3. 與「大、塑膠」同，有2種；與「大、藍色」同，有2種；與「大、圓形」同，有1種；與「塑膠、藍色」同，有2種；與「塑膠、圓形」同，有1種；與「藍色、圓形」同，有1種，共9種，故選(2)

二、多選題

4. (1)開口向上，$\therefore a>0$

(2)頂點 $\dfrac{-b}{2a}=0\Rightarrow b=0$

(3)與 x 軸有相異兩個交點，$\therefore D=b^2-4ac>0$

(4) $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c<0$

故選(4)

5. 已知 $a_{11}+a_{21}=1,a_{12}+a_{22}=1,b_{11}+b_{21}=1,b_{12}+b_{22}=1$

(1) $AB=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}$

第一行的和爲

$a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}=b_{11}(a_{11}+a_{21})+b_{21}(a_{12}+a_{22})$

$=b_{11}\times1+b_{21}\times1=b_{11}+b_{21}=1$

第二行的和爲

$a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=b_{12}(a_{11}+a_{21})+b_{22}(a_{12}+a_{22})$

$=b_{12}\times1+b_{22}\times1=b_{12}+b_{22}=1$

故 AB 爲轉移矩陣

(2) $A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}&a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}\\a_{21}a_{11}+a_{22}a_{21}&a_{21}a_{12}+a_{22}a_{22}\end{bmatrix}$

第一行的和爲

$a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+a_{21}a_{11}+a_{22}a_{21}=a_{11}(a_{11}+a_{21})+a_{21}(a_{12}+a_{22})$

$=a_{11}\times1+a_{21}\times1=a_{11}+a_{21}=1$

第二行的和爲

$a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}+a_{21}a_{12}+a_{22}a_{22}=a_{12}(a_{11}+a_{21})+a_{22}(a_{12}+a_{22})$

$=a_{12}\times1+a_{22}\times1=a_{12}+a_{22}=1$

故 A^2 爲轉移矩陣

(3)若 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$，$\det A=0$，故 A^{-1} 不存在

(4)若 $A=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&1\\\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}$，則 $AB=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&1\\\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}$，

$BA=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，故 $AB\ne BA$

故選(1)(2)

6. (1)由 $\dfrac{(0.33+0.77)}{2}=55\%$，且 $20\times0.55=11$，故(1)是正確的

(2)區間長度較短，不代表模擬較準確；只能說此次模擬的誤差爲 $\dfrac{0.86-0.44}{2}=21\%$

(3)設 x 爲擲100次出現正面的比例，因 $x(1-x)\le\dfrac{1}{4}$，

故 $2\times\sqrt{\dfrac{x(1-x)}{100}}\le2\times\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}}{100}}=\dfrac{1}{10}<0.22$，

所以此選項爲正確

(4)此敘述爲信心水準爲95%的適當解讀

故選(1)(3)(4)

7. (1)由 $0.5=r\cdot\dfrac{s_y}{s_x}$ 可得 $r>0$

(2)由 $0.5=r\cdot\dfrac{s_y}{s_x}$，且 $s_y=5$，$s_x=7$ 可得 $r=0.7$

(3)直線 $Y=35+0.5X$ 代表200個點 (X,Y) 到此直線的殘差平方和爲最小

(4)將 $X=10$ 代入 $Y=35+0.5X$ 得 $Y=40$
故選(1)(4)

三、選填題

A. $\left[\dfrac{35}{(25+27+35)}\right]=\dfrac{35}{87}$

B. 四邊形 $ABCD$ 面積 $=\Delta ABC+\Delta ADC$

$\dfrac{87}{2}=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}6 & 11\\ 3 & 6\end{vmatrix}\right|+\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}6 & 11\\ -3x & -2x\end{vmatrix}\right|$

$87=3+\left|21x\right|\Rightarrow x=\pm4$ (4 不合)

故 $\overrightarrow{DA}=(-12,-8)$

C. 令 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\Rightarrow 4x+1=\sqrt{5}\Rightarrow 16x^2+8x-4=0$

$\Rightarrow 4x^2+2x-1=0$

$4x^3-2x^2-3x=(4x^2+2x-1)(x-1)+(-1)$

故其值爲 -1

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\log_4\alpha+\log_4\beta=\dfrac{7}{2}$　(2 分)

$\Rightarrow \log_4\alpha\beta=\dfrac{7}{2}\Rightarrow \alpha\beta=4^{\frac{7}{2}}=2^7=128$　(5 分)

(2) $(\log_4\alpha)^2+(\log_4\beta)^2$

$=(\log_4\alpha+\log_4\beta)^2-2(\log_4\alpha\times\log_4\beta)$　(3 分)

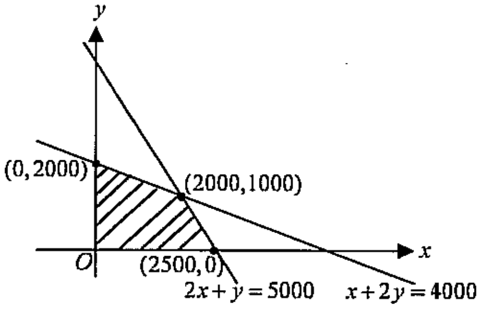
$=(\dfrac{7}{2})^2-2\times2=\dfrac{33}{4}$　(4 分)

二、設 A 款智慧型手機生產 x 支，B 款智慧型手機生產 y 支

條件：$\begin{cases}2000x+4000y\le 8000000\\ 4000x+2000y\le 10000000\\ x,y\text{爲非負整數}\end{cases}$，

可行解區域 $\begin{cases}x+2y\le 4000\\ 2x+y\le 5000\\ x,y\text{爲非負整數}\end{cases}$。(4 分)

目標函數 $f(x,y)=6000x+8000y$。(2 分)



(3 分)

(x,y)	$6000x+8000y$
(0,0)	0
(2500,0)	15000000
(2000,1000)	20000000
(0,2000)	16000000

(2 分)

所以 A 款智慧型手機生產 2000 支，B 款智慧型手機生產 1000 支，可得最大利潤 20000000 元。(1 分)