

全國公私立高級中學

101 學年度指定科目第六次聯合模擬考試

考試日期：102 年 4 月 9~10 日

數學乙

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

- 作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
 - 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
 - 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
 - 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 \square^3 與第 19 列的 \square^8 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別

在答案卡的第 20 列的 \square^- 與第 21 列的 \square^7 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 74 分)

一、單選題 (占 18 分)

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 如圖(一)，九宮格內有兩種圖形(三角形與圓形)，若任選三格，試問：可連成一直線(鉛直線、水平線、對角線，不一定要同一個圖案)或三格同一個圖案的狀況有幾種？

- (1) 12
- (2) 14
- (3) 20
- (4) 21
- (5) 22

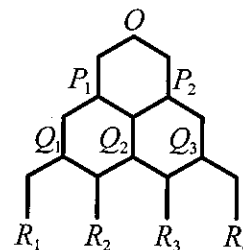
○	△	○
△	○	△
○	△	○

圖(一)

2. 設 $f(x)=2^x$ ， $g(x)=\log_2 x$ ，若 $y=30$ 與 $y=f(x)$ 、 $y=g(x)$ 的圖形分別交於 A 、 B 兩點，下列何者最接近 \overline{AB} 的值？

- (1) 10^8
- (2) 10^9
- (3) 10^{10}
- (4) 9
- (5) 10

3. 一個分枝管道圖如圖(二)，從上方 O 處放入一顆彈珠，彈珠會隨機的向左或向右落下。若彈珠在分枝處向左或向右落下的機率比為 $3:1$ ，且彈珠出現在 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 分別可得獎金 0 、 100 、 200 、 300 元，試求得到獎金的期望值。



圖(二)

(1) 225

(2) 200

(3) 150

(4) 100

(5) 75

二、多選題 (占 32 分)

說明：第 4 題至第 7 題，每題有 4 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4 分；答錯多於 1 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 下列各敘述中， A 、 B 兩事件互相獨立者有哪些？

(1) 投擲一公正骰子兩次， A ：第一次擲得偶數的事件， B ：點數和為 5 的事件

(2) 投擲公正骰子一次， A ：點數為偶數， B ：點數為 4 的因數

(3) 從編號 $1\sim 120$ 的球中取一球， A ：取出的球為奇數， B ：取出的球為 5 的倍數

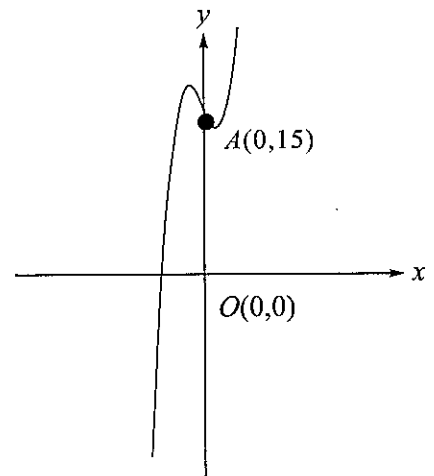
(4) $P(A|B) = P(B|A)$

5. 有一組二維數據，平均數分別為 $\bar{x}=3$ 、 $\bar{y}=5$ ，標準差分別為 $S_x=2$ 、 $S_y=4$ ，兩者的相關係數 $r_{x,y}=0.8$ 。設 $x'=2x-1$ 、 $y'=-3y+2$ ，請選出正確的選項。

- (1) $\bar{x}'=6$
- (2) $S_{y'}=12$
- (3) $r_{x',y'}=-0.8$
- (4) y' 對 x' 的迴歸直線斜率為 -1.6

6. 已知實係數方程式 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c=0$ 有一根為 $1+2i$ ，且 $y=f(x)$ 的圖形如圖(三)，請選出正確的選項。

- (1) $a+b+c=18$
- (2) 圖形與 x 軸交於 $(-3,0)$
- (3) 方程式 $f(x^2)=0$ 恰有兩實根
- (4) $f(x)\div(x-2)$ 的餘式為 35



圖(三)

7. 甲、乙、丙三人組隊參加校外的數學競賽，題目共分為三類：

I. 團體賽：共 10 題，每題 4 分，三人同作一份試卷，須分配作答。

II. 接力題：乙必須參考甲的正確答案作答(甲答對乙才可能答對)，丙必須參考乙的正確答案作答(乙答對丙才可能答對)，丙答對給 6 分。

III. 挑戰題：三人同解一個難題。

已知甲、乙、丙的答對率分別為 $\frac{4}{5}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{1}{2}$ ，請選出正確的選項。

(1) 團體賽中，甲分配 5 題，乙分配 3 題，丙分配 2 題，則得分的期望值為 29

(2) 每題接力題答對的機率為 $\frac{3}{10}$

(3) 挑戰題答對的機率為 $\frac{3}{10}$

(4) 挑戰題答對的狀況下，是甲獨自答對的機率為 $\frac{1}{3}$

三、選填題 (占 24 分)

說明：1. 第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(8-17)。

2. 每題完全答對給 8 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 長方形 $ABCD$ ，若 $\overline{AB}=6$ 、 $\overline{AD}=8$ 。E、F 分別在線段 \overline{AB} 、 \overline{AD} 上，且 $\overline{AE} : \overline{EB}=2 : 1$ 、 $\overline{AF} : \overline{FD}=3 : 1$ ，則 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CE} = \underline{\textcircled{8}} \textcircled{9} \textcircled{10}$ 。

B. 若知 $\log x$ 的首數與 $\log 196$ 的首數相同，而 $\log x$ 的尾數只有 $\log 289$ 之尾數的一半，求

$$x = \underline{\textcircled{11}\textcircled{12}\textcircled{13}}。$$

C. 已知平行四邊形 $ABCD$ 頂點為 $A(2,1)$ 、 $B(8,2)$ 、 $C(12,9)$ 、 $D(6,8)$ ，圓 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ ，一直線 L 恰可同時平分平行四邊形 $ABCD$ 與圓 C 的面積，試求 L 的直線方程式：

$$\underline{\textcircled{14}x - \textcircled{15}y = \textcircled{16}\textcircled{17}}。$$

—— — — — — 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 —— — — — —

第貳部分：非選擇題(占 26 分)

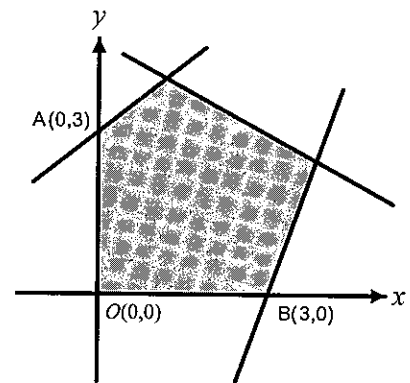
說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號(一、二)與子題號(1、2、……)，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、旅美左投陳偉殷於牛棚練投時，教練發現：當他投出一個好球，下一個也是好球的機率為 0.8；當投出一個壞球，下一個也是壞球的機率為 0.3。試回答下列問題：

1. 試寫出陳偉殷投球情況所對應的轉移矩陣。(3 分)
2. 若第一球投出好球，則第三球也投出好球的機率為何？(5 分)
3. 以穩定狀況估計，陳偉殷每場球賽的好壞球比例為何？(5 分)

二、如圖(四)，灰色區域(含邊界)

$$\text{為聯立不等式 } \begin{cases} 2x - y \leq b \\ 2x + 3y \leq 14 \\ x - ay \geq -3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ 所對應的圖形，}$$



圖(四)

試回答下列問題：

1. 數對 $(a,b) = ?$ (4 分)
2. 設目標函數為 $P = 3x - y$ ，試求 P 的最大值與最小值。(9 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	2	5	13	23	14	12	-	3	6	1	7	0	7	6
16	17													
1	9													

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 分直線與圖形討論

①有三條直的，三條橫的，兩條斜的

②○為 $C_3^5 = 10$

△為 $C_3^4 = 4$

∴共有 $8+10+4-2=20$



斜的與○重覆算到

∴答案為(3)

2. A 點為 $(\log_2 30, 30)$

B 點為 $(2^{30}, 30)$

∴ $\overline{AB} = 2^{30} - \log_2 30 \approx 2^{30} - 5 \approx 2^{30} = (2^{10})^3$

$= (1024)^3 \approx 10^9$

∴答案為(2)

3.

獎金	0	100	200	300
機率	$C_0^3(\frac{3}{4})^3$	$C_1^3(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4})$	$C_2^3(\frac{3}{4})(\frac{1}{4})^2$	$C_3^3(\frac{1}{4})^3$

∴期望值

$$= 0 \cdot C_0^3(\frac{3}{4})^3 + 100 \cdot C_1^3(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4}) + 200 \cdot C_2^3(\frac{3}{4})(\frac{1}{4})^2 + 300 \cdot C_3^3(\frac{1}{4})^3$$

$$= 100[0 \cdot C_0^3(\frac{3}{4})^3 + 1 \cdot C_1^3(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4}) + 2 \cdot C_2^3(\frac{3}{4})(\frac{1}{4})^2 + 3 \cdot C_3^3(\frac{1}{4})^3]$$

$$= 100 \times np = 100 \times 3 \times \frac{1}{4} = 75$$

∴答案為(5)

二、多選題

4. (1) $P(A) = \frac{3 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{2}$

和為 5 有 (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)

$$\therefore P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\text{則 } P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = P(A) \times P(B)$$

∴獨立

(2) $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

為 4 的因數有 1, 2, 4 ∴ $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$\text{則 } P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq P(A) \times P(B)$$

∴不獨立

(3) $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{5}$

$$\text{則 } P(A \cap B) = \frac{12}{120} = \frac{1}{10} = P(A) \times P(B)$$

∴獨立

(4) $P(A|B) = P(B|A)$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B) = P(A)$$

∴與獨立無關

∴答案為(1)(3)

5. (1) $\overline{x'} = 2\overline{x} - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$

(2) $S_{y'} = |-3|S_y = 12$

(3) $r_{x',y'} = -r_{x,y} = -0.8$

(4) $r_{x',y'} \cdot \frac{S_{y'}}{S_{x'}} = -0.8 \times \frac{12}{4} = -2.4$

∴答案為(2)(3)

6. (1) 一根為 $1+2i$ ，另一根為 $1-2i$

$$\text{因式為 } [x - (1+2i)][x - (1-2i)] = x^2 - 2x + 5$$

又過 (0,15) ∴ $c = 15$

$$\text{即 } f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 15 = (x^2 - 2x + 5)(2x + 3)$$

$$\text{所以 } f(1) = 2 + a + b + c = (1 - 2 + 5)(2 + 3) = 20$$

$$\Rightarrow a + b + c = 18$$

(2) 與 x 軸交於 $(-\frac{3}{2}, 0)$

(3) $x^2 = -\frac{3}{2}, 1 \pm 2i$ ∴ x 無實根

(4) 餘式定理 $f(2) = (2^2 - 2 \times 2 + 5)(2 \times 2 + 3) = 35$

∴答案為(1)(4)

7. (1) $(5 \times \frac{4}{5} + 3 \times \frac{3}{4} + 2 \times \frac{1}{2}) \times 4 = 29$

(2) $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

(3) $1 - \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{39}{40}$

(4) $\frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{39}{40}} = \frac{4}{39}$

∴答案為(1)(2)

三、選填題

A. ∴ $\overline{AE} : \overline{EB} = 2 : 1$

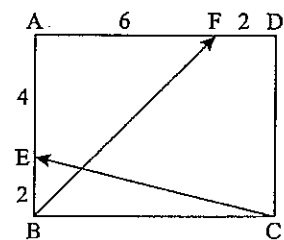
$$\therefore \overline{AE} = 4, \overline{EB} = 2$$

$$\therefore \overline{AF} : \overline{FD} = 3 : 1$$

$$\therefore \overline{AF} = 6, \overline{FD} = 2$$

設 B 為 (0,0)，則 C(8,0), E(0,2), F(6,6)

$$\text{故 } \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CE} = (6,6) \cdot (-8,2) = -36$$



B. $\log 196 = \log(1.96 \times 10^2) = 2 + \log 1.96$

$\log 289 = \log(2.89 \times 10^2) = 2 + \log 2.89$

$\therefore \log x = 2 + \frac{\log 2.89}{2} = \log 10^2 + \log 1.7 = \log 170$

$\Rightarrow x = 170$

C. 直線把平行四邊形面積分一半，需過中心 $M = \frac{A+C}{2} = (7,5)$

把圓形面積分一半，需過圓心 $N(1,-2)$

因此直線方程式為 $y+2 = \frac{5-(-2)}{7-1} \times (x-1) \Rightarrow 7x-6y=19$

第貳部分：非選擇題

一. 1. 好壞 壞好
 好 $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$ 或 壞 $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$ (3分)

2. 令 $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$

$X_2 = AX_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ (2分)

$X_3 = AX_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.78 \\ 0.22 \end{bmatrix}$ (2分)

\therefore 第三球為好球的機率是 0.78 (1分)

3. 令 x 為好球比例，則 $1-x$ 為壞球比例
 長期而言，表示

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$ (列出式子 1分)

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.8x+0.7(1-x) \\ 0.2x+0.3(1-x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.1x+0.7 \\ -0.1x+0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{7}{9}$ (2分)

\therefore 好壞球比例為 $\frac{7}{9} : \frac{2}{9} = 7:2$ (寫成比例 2分)

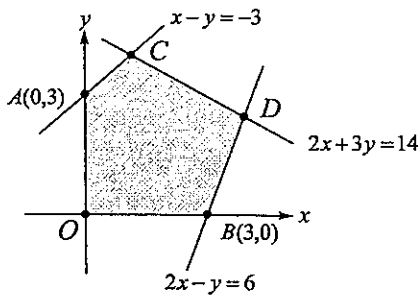
二. 1. $A(0,3)$ 在 $x-ay=-3$ 上

$\therefore a=1$ (2分)

$B(3,0)$ 在 $2x-y=b$ 上

$\therefore b=6$ (2分)

2.



灰色區域為封閉區域

\therefore 利用頂點法

頂點	$O(0,0)$	$A(0,3)$	$B(3,0)$	$C(1,4)$	$D(4,2)$
$P=3x-y$	0	-3	9	-1	10
	(1分)	(1分)	(1分)	(1分)	(1分)

$\therefore \max = 10$ (2分)

$\min = -3$ (2分)