臺中區國立高級中學 101 學年度
大學入學指定科目考試第二次聯合模擬考

數學甲

試題編號：AU-3014

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘
題型題數：單選題 5 題，多選題 4 題，選填題第A至B題共 2 題，非選擇題共二大題
作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在「答案卡」上劃記，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正液。
第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，請在規定之欄位以較粗的黑色原子筆、鋼珠筆或中性筆作答，並標明題號。
作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

（一）填答選擇題時，只用 1，2，3，4，5 等五個格子，而不需要用到 −，±，以及 6，7，8，9，0 等格子。

例：若第 1 題的選項為(1) 3 (2) 5 (3) 7 (4) 9 (5) 11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第一列 3 劃記（注意不是 7），如：

解答欄												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

例：若多選題第 10 題的正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 1 與 3 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
10	■	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

（二）選填題的題號是A，B，C，⋯，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第B題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而答案是 $\dfrac{3}{8}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
21	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

祝考試順利

第壹部分：選擇題（佔 76 分）

一、單選題（30 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題 5 個選項，其中只有 1 個是最適當的選項，畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 6 分，未作答、答錯、或畫記多於 1 個選項者，該題以零分計算。

1. A 和 B 是兩個二階方陣，方陣中每一位置的元素都是實數。就二階方陣所對應的平面變換來說，A 在平面上的作用是以原點爲中心旋轉 θ 角度，而 B 在平面上的作用是對直線 $L：y=mx$ 的鏡射。下列選項中，哪一個有可能是 AB？

(1) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$

2. 空間中三個向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$、$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$，若 $|\vec{a}|=10$，$\vec{b}\times\vec{c}=\vec{d}$，$\vec{d}$ 和 $\vec{a}$ 的夾角爲 $60°$，$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=60$，則 $|\vec{d}|$ 之值爲何？

(1) 6　(2) $6\sqrt{3}$　(3) 10　(4) $10\sqrt{3}$　(5) 12

3. 有一個數列 $\langle a_n \rangle$，已知 $a_n=\begin{cases} (-1)^n, & 1\le n<100 \\ 1^n, & 100\le n<200 \\ (\frac{1}{2})^n, & 200\le n<300 \\ \frac{4n+1}{2n-1}, & 300\le n<400 \\ \frac{2n+1}{4n-1}, & 400\le n \end{cases}$，$n\in N$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$

(1)不存在　(2) 1　(3) 0　(4) 2　(5) $\frac{1}{2}$

4. 設θ為實數，且n為小於等於2013的正整數，則有多少個n滿足
$(\sin\theta+i\cos\theta)^n=\sin n\theta+i\cos n\theta$
(1) 503　(2) 504　(3) 1006
(4) 1007　(5) 2013

5. 設$k>0$，$x,y>0$，且滿足$x^2+y^2=14xy$，若$\log[k(x+y)]=\dfrac{1}{2}(\log x+\log y)$，則$k=$?
(1) $\dfrac{1}{16}$　(2) $\dfrac{1}{14}$　(3) $\dfrac{1}{4}$
(4) $\dfrac{1}{2}$　(5) $\dfrac{\log 14}{2}$

二、多選題（32分）

說明：第6題至第9題，每題有5個選項，其中至少有1個是正確的選項。選出正確選項，畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得8分，答錯1個選項者，得4.8分，答錯2個選項者，得1.6分，所有選項均未作答或答錯多於2個選項者，該題以零分計算。

6. 甲、乙兩人玩一個遊戲，在一個箱子中放入1到20號的球各一個，甲、乙先後分別自箱中取一球，取後不放回，其輸贏由以下規則判定：
A.取到2號球者贏。
B.若沒有人取到2號球，則
①取到質數號球者贏，但是若兩人均取到質數號球，則球號大者贏。
②若兩人均沒取到質數號球，則球號大者贏。
譬如：若甲取到2號，乙取到7號，則甲贏；
若甲取到11號，乙取到3號，則甲贏；
若甲取到5號，乙取到20號，則甲贏；
若甲取到6號，乙取到4號，則甲贏。
已知甲先取球且甲贏了。請選出正確的選項。

(1)甲取到質數號球的機率$>\frac{2}{3}$

(2)乙取到質數號球的機率$<\frac{1}{3}$

(3)甲、乙均取到質數號球的機率$<\frac{1}{3}$

(4)甲取到質數號球，乙沒取到質數號球的機率$>\frac{2}{3}$

(5)甲、乙均沒取到質數號球的機率$<\frac{1}{3}$

7. 坐標平面上，O為原點，設P_1，P_2，P_3，P_4是滿足$\overrightarrow{OP_{n-1}}+\overrightarrow{OP_{n+1}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_n}$ ($n=2,3$)的四個點，請選出正確的選項。

(1)若$P_1P_2P_3$形成一三角形，則P_4在$\triangle P_1P_2P_3$的內部

(2)若$P_1P_2P_3P_4$形成一四邊形，則至少有一組對邊平行

(3)若$\overrightarrow{OP_4}=\alpha\overrightarrow{OP_1}+\beta\overrightarrow{OP_2}$，則$\alpha+\beta=1$

(4)若P_1，P_2，P_3在單位圓$x^2+y^2=1$上，則$\cos\angle P_1OP_2=\frac{3}{4}$

(5)若P_1，P_2，P_3在單位圓$x^2+y^2=1$上，則P_4也在單位圓上

8. 空間中，面積為 15 的四邊形$ABCD$，若$A(2,8,4)$、$B(4,10,4)$、$C(5,13,0)$、$D(a,b,c)$，其中D點在平面$2x-y-z+6=0$上。若符合條件的D點僅有一個。請選出正確的選項。

(1)A、B、C三點所在的平面為$2x-2y-z+16=0$

(2)$\triangle ABC$的面積為 12

(3)$0<a\leq 3$

(4)$3<b\leq 6$

(5)$3<c\leq 6$

9. 坐標平面上，四個點 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(t,0)$，其中 $0<t<1$，設 D 在線段 $\overline{AB}$ 上，使得 $\angle ACD=\angle BCO$，當 $t=\alpha$ 時，$\triangle BCD$ 面積有最大值 S，請選出正確的選項。

(1) $\alpha\in Q$　　(2) $0<\alpha<\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{2}<\alpha<1$　　(4) $0<S<\frac{1}{4}$

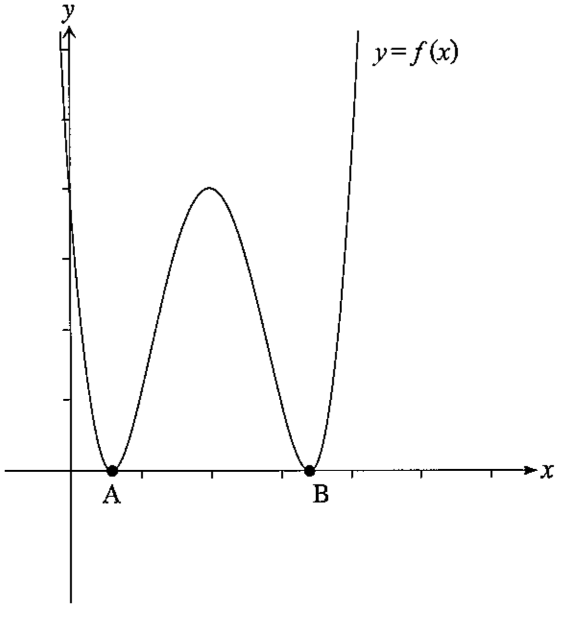
(5) $\frac{1}{4}<S<\frac{1}{2}$

三、選填題（14 分）

說明：1.第 A 與第 B 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（10～16）。
2.每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2013+2\Delta x)-f(2013-\Delta x)}{2013\,\Delta x}=$ ⑩⑪⑫⑬⑭⑮。

B. 如下圖，若 $p,q\in Z$，且函數 $f(x)=x^4-8x^3+20x^2+px+q$ 與 x 軸相切於相異兩點 $A(\alpha,0)$，$B(\beta,0)$，則 $|\alpha-\beta|=\sqrt{⑯}$。



第貳部分：非選擇題（24 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（(1)、(2)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分，甚至給零分。每一子題配分標於題末。

一、一袋中有 1 號球 a 顆、2 號球 b 顆、3 號球 c 顆，共有 100 個，今每次取一球，取後放回，試回答下列問題：

(1)若 X 表示抽一次球所得的號碼數，且 X 的期望值爲 2，變異數爲 $\frac{1}{2}$，則數對 $(a,b,c)=$？（6 分）

(2)若 Y 表示取 10 次所得到 1 號球的次數，試求 Y 的期望值與標準差。（6 分）

二、設 $a>0$，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 爲實係數三次多項函數。直線 L：$y=2x-1$。已知

①$y=f(x)$ 的反曲點爲 $A(1,1)$。

②$y=f(x)$ 和直線 L 都通過 $A(1,1)$、$B(3,5)$ 兩點。

③$y=f(x)$ 和直線 L 所圍的區域面積爲 24。

(1)試求 $\frac{a}{b}$ 之值。（3 分）

(2)試求 a、b、c、d 之值。（9 分）

臺中區國立高級中學101學年度
大學入學指定科目考試第二次聯合模擬考
數學甲詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 參考答案：(2)

試題解析：$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

設 $m=\tan\phi \Rightarrow B=\begin{bmatrix}\cos 2\phi & \sin 2\phi\\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi\end{bmatrix}$

$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}\cos(\theta+2\phi) & \sin(\theta+2\phi)\\ \sin(\theta+2\phi) & -\cos(\theta+2\phi)\end{bmatrix}$

故選(2)

2. 參考答案：(5)

試題解析：$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所圍的平行六面體體積 $=\left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\right|=60$

$\Rightarrow 60=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=|\vec{a}\cdot\vec{d}|=10\times|\vec{d}|\times\cos 60^\circ$

$\Rightarrow |\vec{d}|=12$

故選(5)

3. 參考答案：(5)

試題解析：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{4n-1}=\dfrac{1}{2}$

故選(5)

4. 參考答案：(2)

試題解析：$(\sin\theta+i\cos\theta)^n=[i(\cos\theta-i\sin\theta)]^n=[i(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))]^n$

$=i^n[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)]=i^n(\cos n\theta-i\sin n\theta)$

又 $\sin n\theta+i\cos n\theta=i(\cos n\theta-i\sin n\theta)$

知 $i^n=i$，$n=4k+1$，$k\in Z$，所以 $n\in\{1,5,9,\cdots\cdots,2013\}$，$n$ 共有504個

故選(2)

5. 參考答案：(3)

試題解析：$\log[k(x+y)]=\dfrac{1}{2}(\log x+\log y) \Rightarrow 2\log[k(x+y)]=\log xy$

$\Rightarrow \log k^2(x+y)^2=\log xy \Rightarrow k^2(x+y)^2=xy$

$\Rightarrow k^2(x^2+2xy+y^2)=xy \Rightarrow k^2\times 16xy=xy$

$\Rightarrow k^2\times 16=1$，所以 $k=\dfrac{1}{4}$（取正）

故選(3)

二、多選題

6. 參考答案：(2)(3)

試題解析：1 到 20 號共有 8 個質數，12 個非質數

在已知甲先取球且甲贏了的前提下，所有可能為

①甲、乙均取到質數號球，計有 $C_2^8=28$ 種

②甲取到質數號球，乙沒取到質數號球，計有 $8\times 12=96$ 種

③甲、乙均沒取到質數號球，計有 $C_2^{12}=66$ 種

共計有 $28+96+66=190$ 種

(1)甲取到質數號球的機率 $=\dfrac{28+96}{190}<\dfrac{2}{3}$

(2)乙取到質數號球的機率 $=\dfrac{28}{190}<\dfrac{1}{3}$

(3)甲、乙均取到質數號球的機率 $=\dfrac{28}{190}<\dfrac{1}{3}$

(4)甲取到質數號球，乙沒取到質數號球的機率 $=\dfrac{96}{190}<\dfrac{2}{3}$

(5)甲、乙均沒取到質數號球的機率 $=\dfrac{66}{190}>\dfrac{1}{3}$

故選(2)(3)

7. 參考答案：(2)(4)(5)

試題解析：(1)(2) $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_3}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}\cdots\cdots(1)$

$\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_4}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_3}\cdots\cdots(2)$

兩式相減可知 $\overrightarrow{P_4P_1}+\overrightarrow{P_2P_3}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{P_3P_2}\Rightarrow\overrightarrow{P_4P_1}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{P_3P_2}$，

知 $\overrightarrow{P_2P_3}\,//\,\overrightarrow{P_1P_4}$，且 P_4 在 $\triangle P_1P_2P_3$ 的外部

(3) $\overrightarrow{OP_3}=-\overrightarrow{OP_1}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}$，

$\overrightarrow{OP_4}=-\overrightarrow{OP_2}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_3}=-\overrightarrow{OP_2}+\dfrac{3}{2}(-\overrightarrow{OP_1}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_2})=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_1}+\dfrac{5}{4}\overrightarrow{OP_2}$

則 $\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}=-\dfrac{1}{4}$

(4)又 $|\overrightarrow{OP_3}|^2=|-\overrightarrow{OP_1}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}|^2=|\overrightarrow{OP_1}|^2-3\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}+\dfrac{9}{4}|\overrightarrow{OP_2}|^2$

又 $|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=|\overrightarrow{OP_3}|=1$，所以 $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\dfrac{3}{4}=|\overrightarrow{OP_1}||\overrightarrow{OP_2}|\cos\angle P_1OP_2$

則 $\cos\angle P_1OP_2=\dfrac{3}{4}$

(5)利用(4)知

$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\dfrac{3}{4}$，則

$|\overrightarrow{OP_4}|^2=|-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_1}+\dfrac{5}{4}\overrightarrow{OP_2}|^2=\dfrac{9}{4}|\overrightarrow{OP_1}|^2-\dfrac{15}{4}\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}+\dfrac{25}{16}|\overrightarrow{OP_2}|^2$

$=\dfrac{9}{4}\times 1-\dfrac{15}{4}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{25}{16}\times 1=1$

故選(2)(4)(5)

8. 參考答案：(1)(3)

試題解析：(1) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2,2,0)\times(3,5,-4)=(-8,8,4)//(2,-2,-1)$

$\Rightarrow$ A、B、C三點所在的平面爲$2x-2y-z+16=0$

(2) $\triangle ABC$的面積$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=6$

(3)(4)(5)

D點在平面$2x-y-z+6=0$和平面$2x-2y-z+16=0$的交線L上

$L:\begin{cases}x=t+2\\y=10\\z=2t\end{cases}$ $\Rightarrow$ 設$D(t+2,10,2t)$

$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AC}|=\triangle ADC$的面積$=15-6$ $\Rightarrow$ $t=\frac{12}{5}$、0

$\Rightarrow$ $D(\frac{22}{5},10,\frac{24}{5})$、$D(2,10,0)$

①$D(\frac{22}{5},10,\frac{24}{5})$

設$\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$ $\Rightarrow$ $m=\frac{15}{2}$、$n=-5$不合（∵ 爲四邊形$ACBD$）

②$D(2,10,0)$

設$\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$ $\Rightarrow$ $m=\frac{3}{2}$、$n=1$合所求

$D(a,b,c)=D(2,10,0)$

故選(1)(3)

9. 參考答案：(2)(4)

試題解析：$B(0,1)$對x軸作對稱點$B'(0,-1)$，設$D(1-h,h)$，$0<h<1$

連$\overline{B'D}$，交x軸於$C(t,0)$，則$\angle ACD=\angle BCO$

利用D，C，B'三點共線知$\frac{1-h-t}{t}=\frac{h}{1}$，可得$t=\frac{1-h}{1+h}$

$\overrightarrow{BC}=(t,-1)$，$\overrightarrow{BD}=(1-h,h-1)$

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}t & -1\\1-h & h-1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|(t-1)(h-1)|=\frac{1}{2}(1-t)(1-h)=\frac{h(1-h)}{1+h}$

令$x=h+1$，則$\triangle BCD=\frac{(x-1)(2-x)}{x}=\frac{3x-x^2-2}{x}$

$=3-x-\frac{2}{x}=3-(x+\frac{2}{x})\leq 3-2\sqrt{2}$

所以$\triangle BCD$面積有最大值$S=3-2\sqrt{2}$

“=”成立爲$x=\sqrt{2}$，即$h=\sqrt{2}-1$，此時$t=\frac{1-h}{1+h}=\sqrt{2}-1=\alpha$

故選(2)(4)

三、選填題

A. 參考答案：-18111（⑩ $-$　⑪ 1　⑫ 8　⑬ 1　⑭ 1　⑮ 1）

試題解析：$f(x)=-x^3+x^2-2$ $\Rightarrow$ $f'(x)=-3x^2+2x$

所求$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2013+2\Delta x)-f(2013-\Delta x)}{3\Delta x}\times\frac{3}{2013}=f'(2013)\times\frac{3}{2013}=-18111$

B. 參考答案：$\sqrt{8}$（⑯ 8）

試題解析：$x^4-8x^3+20x^2+px+q=0$ 有兩個相異的雙重根 α，β

$\Rightarrow x^4-8x^3+20x^2+px+q=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=[(x-\alpha)(x-\beta)]^2$

$\Rightarrow x^4-8x^3+20x^2+px+q=(x^2-mx+n)^2$，此時 $m=\alpha+\beta$，$n=\alpha\beta$

乘開 $x^4-8x^3+20x^2+px+q=x^4-2mx^3+(m^2+2n)x^2-2mnx+n^2$

比較可知 $m=4=\alpha+\beta$，$n=2=\alpha\beta$

所以 $|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{8}$

第貳部分：非選擇題

一、參考答案：(1) $(25,50,25)$（6 分）

(2)期望值 $\frac{5}{2}$，標準差 $\frac{\sqrt{30}}{4}$（6 分）

試題解析：(1)利用 $E(X)=\Sigma x_i p_i=\mu$，$Var(X)=\Sigma(x_i-\mu)^2 p_i$ 列出下列式子

$$\begin{cases} a+b+c=100 \text{（1 分）} \\ 1\times\frac{a}{100}+2\times\frac{b}{100}+3\times\frac{c}{100}=2 \text{（1 分）} \\ (1-2)^2\times\frac{a}{100}+(2-2)^2\times\frac{b}{100}+(3-2)^2\times\frac{c}{100}=\frac{1}{2} \text{（1 分）} \end{cases}$$

整理可知

$$\begin{cases} a+b+c=100 \\ a+2b+3c=200 \\ a+c=50 \end{cases}$$，解得 $a=25$，$b=50$，$c=25$（3 分）

(2) $E(Y)=np=10\times\frac{25}{100}=\frac{5}{2}$（3 分）

標準差 $=\sqrt{Var(Y)}=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{10\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{30}}{4}$（3 分）

二、參考答案：(1) $-\frac{1}{3}$（3 分）

(2) $(a,b,c,d)=(3,-9,-1,8)$（9 分）

試題解析：(1) $f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f''(1)=0 \Rightarrow b=-3a$

$a：b$ 的比值為 $-\frac{1}{3}$（3 分）

(2) $y=f(x)=ax^3-3ax^2+cx+d$ 通過 $A(1,1)$、$B(3,5)$ 兩點

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a+c+d=1 \\ 3c+d=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2-k \\ c=k \\ d=5-3k \end{cases} \text{（2 分）}$$

$y=f(x)=(2-k)x^3+(3k-6)x^2+kx+(5-3k)$

$2\int_1^3[(2x-1)-f(x)]dx=24$（2 分） $\Rightarrow k=-1$（4 分）

$\Rightarrow (a,b,c,d)=(3,-9,-1,8)$（1 分）