全國公私立高級中學

101 學年度指定科目第七次聯合模擬考試

考試日期：102 年 5 月 9~10 日

數學甲

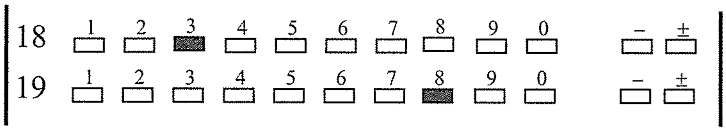
—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

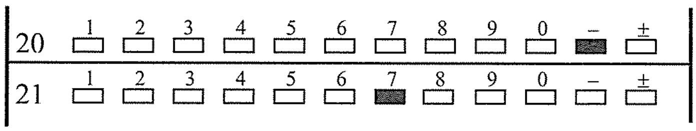
作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：



第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 76 分)

一、單選題(占 30 分)

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 已知 k 爲正整數，且滿足 $|x-2|<\log_2 k$ 的 x 正整數解恰有 5 個，則符合條件的 k 值有幾種不同可能？

(1) 5　(2) 6　(3) 7
(4) 8　(5) 9

2. 已知 O、A、B 爲平面上相異三點，$\overline{OA}=1$、$\overline{OB}=1$、$\angle AOB=60^\circ$。若平面上點 P 滿足 $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$t$ 爲實數。則當 t 爲下列何值時，$\angle APB$ 爲鈍角？

(1) $-\pi$　(2) $\log 2$　(3) 1
(4) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$　(5) π^2

3. 設 $a,b,c\in R$，已知 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x-1}=a$ 且函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}, & \text{若}x\neq 1\\ c, & \text{若}x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 連續，則 $f(1)=$？

(1) 0　(2) 1　(3) 2
(4) 3　(5) 4

4. 設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+8$ 為三次實係數多項式，若方程式 $f(x)=0$ 有純虛根且三個根在複數平面上恰構成一直角三角形，則 $a+b=$？

(1) -8　(2) -6　(3) 2
(4) 6　(5) 8

5. 設 $1<a<b$，$k>0$。若 $\log_a b-\log_b a=1$ 且 $\log_a b=\log k$，則 k 與下列何數最接近？
($\log 2=0.301$，$\log 3=0.4771$，$\sqrt{3}=1.73$，$\sqrt{5}=2.24$)

(1) 25　(2) 40　(3) 300
(4) 600　(5) 1600

二、多選題(占32分)

說明：第6題至第9題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得8分；答錯1個選項者，得4.8分；答錯2個選項者，得1.6分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6. 已知 $w=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$，$z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$，$\overline{w}$為 w 的共軛複數，請選出正確的選項。

(1) w、z 均為 $x^3=1$的解

(2) $w+w^3=z^2$

(3) w、z、wz 為等比數列

(4) $(\overline{w}+z^2)^{10}=-243$

(5) m、n 為相異正整數，則絕對值$\left|w^m-w^n\right|$有3種可能

7. 已知袋子中有1紅球、2白球，每次隨機自袋中取一球，看完顏色後將球放回袋中，再重新取球。若取出為紅球得1分，白球則得0分。設反覆進行5次後，統計總得分為 X，請選出正確的選項。

(1) $X=3$的機率小於$\frac{1}{6}$

(2) 已知 $X=3$，則第3球為紅球的條件機率為$\frac{8}{81}$

(3) X為偶數的機率為$\frac{122}{243}$

(4) X的期望值大於2分

(5) 若將得分規則變為取紅球得2分，白球得1分，則反覆抽取5次的總得分期望值大於7分

8. 設 $f(x)$ 爲實係數三次多項式，$f'(x)$ 表示 $f(x)$ 的導函數且滿足下列條件：

(Ⅰ) $f(x)$ 的圖形通過原點

(Ⅱ) 不等式 $f'(x)>0$ 和 $\dfrac{x-2}{x}<0$ 有相同解

(Ⅲ) $f(x)$ 的圖形在反曲點的切線斜率爲 3

請選出正確的選項。

(1) 當 $0<x<2$，$f(x)$ 的圖形爲嚴格遞增且凹向下

(2) $f(x)$ 在 $x=0$ 有極小値

(3) $f(x)$ 可被 $x-2$ 整除

(4) $f(x)=0$ 恰有三相異實根

(5) $f(x)$ 的圖形在第一象限和 x 軸所圍區域面積大於 6

9. 設 a,b,c,d 爲實數，矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$J=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，且滿足 $AJ=JA$。若 $\det A$ 爲矩陣 A 的行列式値，請選出正確的選項。

(1) $ab+cd=0$

(2) 若矩陣 A 不是零矩陣，則矩陣 A 必有反矩陣

(3) 若 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$，則 $A^3=I$

(4) 若 $A^2=J$，則矩陣 A 有兩種可能

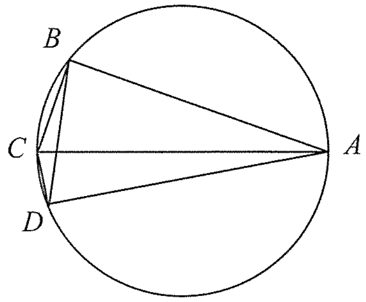
(5) 若平面上 ΔPQR 經矩陣 A 變換後面積變成原來 4 倍，則 $\det A=4$

三、選填題(占 14 分)

說明：1.第 A 題至第 B 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（10–14）。
2.每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 空間中 O 為原點，已知 $A(1,0,2)$、$B(3,2,1)$、$C(1,-2,0)$；設 n 為正整數，若由 $\frac{1}{2^{n-1}}\overrightarrow{OA}$、$\frac{1}{2^{n-1}}\overrightarrow{OB}$、$\frac{1}{2^{n-1}}\overrightarrow{OC}$ 所決定的平行六面體體積記為 V_n，則 $\sum_{n=1}^{\infty} V_n =$ ⑩⑪ 。

B. 如圖(一)所示，圓內接四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AC}$ 為圓之直徑，$\angle BAC = \alpha$，$\angle DAC = \beta$，若 $\overline{BD} = 10$，$\angle BAD = 45°$，且 ΔABC 面積為 ΔACD 面積的兩倍，則 ΔABC 面積為 ⑫⑬$\sqrt{⑭}$ 。



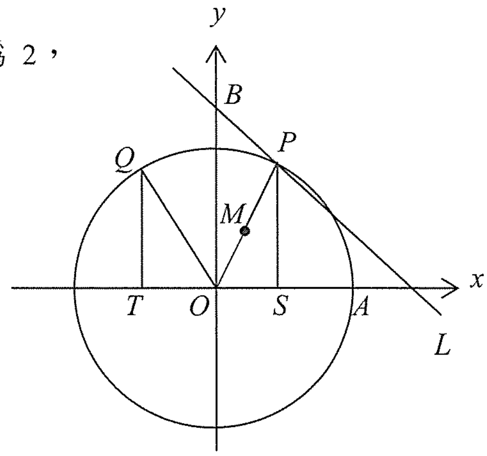
圖(一)

— — — — — — — 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 — — — — — — —

第貳部分：非選擇題(占 24 分)

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（1、2、3），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、如圖(二)，平面上，圓 C 的圓心為原點 O，半徑為 2，點 $A(2,0)$，P、Q 為圓 C 上的動點，$\angle AOP=\angle POQ=\theta$，$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$。$M$ 為 $\overline{OP}$ 中點，直線 L 為過 P 點且斜率為 -1 的直線，B 點為直線 L 與 y 軸的交點。

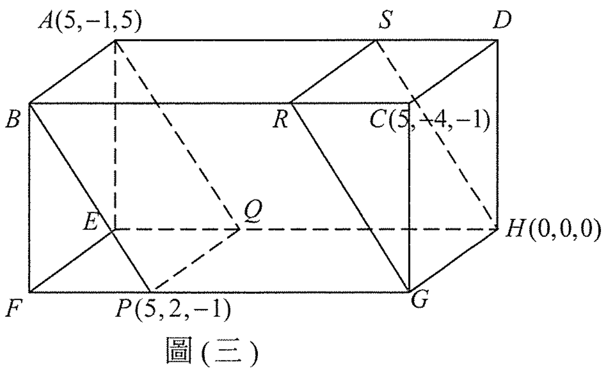


圖(二)

1. 若點 P、Q 在 x 軸上的投影點分別為 S、T，求 ST 線段長的最大值。(6 分)
2. 若 $\overline{BM}^2=a\sin(2\theta+b)+c$，其中 $a>0$，$0\le b\le\frac{\pi}{2}$，$c>0$，試求 a、b、c。(4 分)
3. 試求 $\overline{BM}^2$ 的最大值。(2 分)

二、如圖(三)，$ABCD-EFGH$ 為空間中長方體，已知 $A(5,-1,5)$、$C(5,-4,-1)$、$H(0,0,0)$、$P(5,2,-1)$；P、Q、R、S 分別在長方體的邊上，且 $\overline{AD}=3\overline{SD}$，$\overline{BC}=3\overline{RC}$，$\overline{HE}=3\overline{QE}$，$\overline{GF}=3\overline{PF}$。

1. 設 $\overrightarrow{HG}=\vec{a}$，$\overrightarrow{HE}=\vec{b}$，$\overrightarrow{HD}=\vec{c}$，試求 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$。(5 分)
2. 試求 $HGRS$ 平面的方程式。(4 分)
3. 試求 $ABPQ$ 平面與 $HGRS$ 平面的距離。(3 分)



圖(三)

全國公私立高級中學101學年度指定科目第七次聯合模擬考試

數學甲考科解析

考試日期：102 年 5 月 9~10 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	2	1	4	2	34	13	25	1245	1	6	2	0	5

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. $|x-2|<\log_2 k \Rightarrow 2-\log_2 k<x<2+\log_2 k$；因 2 爲所有 x 整數解中間值，故不等式的整數解爲 -1，0，1，2，3，4，5；
因此 $3<\log_2 k\le 4 \Rightarrow 8<k\le 16$
$k=9,10,11,12,13,14,15,16$ 共 8 種，故選(4)

2. 若 $\angle APB$ 爲鈍角，則 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}<0$。
$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ ；$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=-t\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-t+t^2)|\overrightarrow{OA}|^2+t\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=-t+t^2+\frac{1}{2}t=t^2-\frac{1}{2}t$
若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}<0$，則 $t^2-\frac{1}{2}t<0\Rightarrow 0<t<\frac{1}{2}$，故選(2)

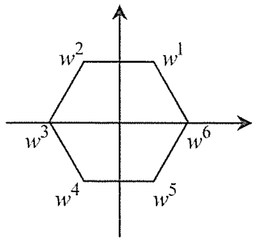
3. $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}=-2\Rightarrow a=-2$
因 $f(x)$ 在 $x=1$ 連續，故 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=c$
且 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$
故 $1^2+a+b=0\Rightarrow b=1$
$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，故 $f(1)=0$
故選(1)

4. 由實係數方程式虛根共軛出現，知三根可設爲 ki 、$-ki$ 、α，其中 $k>0,\alpha$ 爲實數。其在複數平面上對應到 $P(0,k)$、$Q(0,-k)$、$R(\alpha,0)$，由根與係數得 $\begin{cases}(ki)+(-ki)+\alpha=-a\\(ki)\alpha+(-ki)\alpha+(ki)(-ki)=b\\(ki)(-ki)(\alpha)=-8\end{cases}$
得知 $\begin{cases}\alpha=-a\\k^2=b\\k^2\alpha=-8\end{cases}$，又 $\angle PRQ$ 爲直角，故 $\frac{0-k}{\alpha-0}\times\frac{0+k}{\alpha-0}=-1$
$\Rightarrow\frac{-k^2}{\alpha^2}=-1\Rightarrow k^2=\alpha^2$，$k^2\alpha=-8\Rightarrow\alpha^3=-8\Rightarrow\alpha=-2,k=2$
故 $a+b=-\alpha+k^2=2+4=6$，故選(4)

5. 設 $\log_a b=t$，則 $\log_b a=\frac{1}{t}$，$t>1$
故 $t-\frac{1}{t}=1\Rightarrow t^2-t-1=0\Rightarrow t=\frac{1\pm\sqrt5}{2}$ (因 $t>1$，$\frac{1-\sqrt5}{2}$ 不合)
故 $t=\frac{1+\sqrt5}{2}\fallingdotseq1.62$ 和 $\log40=1.602$ 最接近，故選(2)

二、多選題

6. (1) $w^3=\cos\pi+i\sin\pi=-1$，不是 $x^3=1$ 的解
(2) $w+w^3=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}+\cos\pi+i\sin\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}i$
$z^2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt3}{2}i$
(3) $\frac{z}{w}=\frac{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$
$\frac{wz}{z}=w=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ ；故爲等比數列
(4) $\overline{w}+z^2=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\sqrt3 i$
$(\overline{w}+z^2)^{10}=(-\sqrt3 i)^{10}=-243$
(5) n 爲正整數，w^n 在複數平面上構成正六邊形的六個頂點，
$|w^m-w^n|$ 代表兩頂點間的距離，
故有 $0,1,\sqrt3,2$ 共 4 種可能



7. (1) $P(X=3)=C_3^5(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2=\frac{40}{243}<\frac{1}{6}$
(2) $P(\text{第3球紅球}\mid X=3)=\dfrac{C_2^4(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2\frac{1}{3}}{C_3^5(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2}=\frac{3}{5}$
(3) $P(X=0)+P(X=2)+P(X=4)$
$=C_0^5(\frac{2}{3})^5+C_2^5(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3+C_4^5(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})=\frac{122}{243}$
(4)

	5R	4R1W	3R2W	2R3W	1R4W	5W
機率	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$

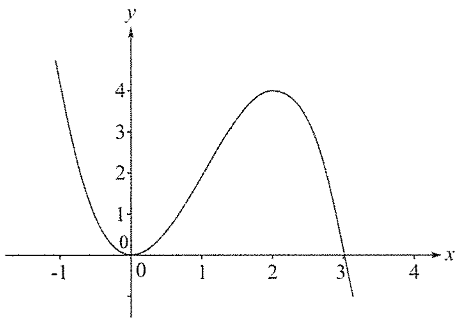
$5\times\frac{1}{243}+4\times\frac{10}{243}+3\times\frac{40}{243}+2\times\frac{80}{243}+1\times\frac{80}{243}+0=\frac{5}{3}$
(5)

	5R	4R1W	3R2W	2R3W	1R4W	5W
機率	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$
得分	10	9	8	7	6	5

$10\times\frac{1}{243}+9\times\frac{10}{243}+8\times\frac{40}{243}+7\times\frac{80}{243}+6\times\frac{80}{243}+5\times\frac{32}{243}$
$=\frac{1620}{243}=\frac{20}{3}$

8. 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$，則 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$\frac{x-2}{x}<0\Rightarrow(x-2)x<0\Rightarrow0<x<2$
故設 $f'(x)=3ax(x-2)=3ax^2-6ax$，且 $a<0$
則 $f''(x)=6ax-6a=6a(x-1)$，故 $x=1$ 有反曲點
此時切線斜率爲 $f'(1)=3\Rightarrow3a\times1\times(-1)=3\Rightarrow a=-1$
因此 $f'(x)=-3x(x-2)$ ；$f''(x)=-6(x-1)$
(1)當 $0<x<2$，$f'(x)=-3x(x-2)>0$，所以圖形爲嚴格遞增
但 $0<x<1$，$f''(x)=-6(x-1)>0$，圖形凹向上；
$1<x<2$，$f''(x)=-6(x-1)<0$，圖形凹向下
(2) $f'(0)=0$，$f''(0)=6>0$ 故在 $x=0$ 有極小值
(3)因 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=-3x^2+6x$，
故 $a=-1$，$b=3$，$c=0$，得 $f(x)=-x^3+3x^2$
由餘式定理 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式爲 $f(2)=4$
故 $f(x)$ 無法被 $x-2$ 整除
(4) $f(x)=-x^3+3x^2=-x^2(x-3)=0$，三根爲 0,0,3

(5)



$f(x)$ 的圖形和 x 軸在第一象限所圍面積爲

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3(-x^3+3x^2)dx=-\frac{x^4}{4}+x^3\Big|_0^3=\frac{27}{4}>6$$

9. (1) $AJ=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&-a\\d&-c\end{bmatrix}$

$JA=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c&-d\\a&b\end{bmatrix}$

$AJ=JA\Rightarrow\begin{bmatrix}b&-a\\d&-c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c&-d\\a&b\end{bmatrix}$

故 $\begin{cases}a=d\\b=-c\end{cases}\Rightarrow ab+cd=ab-ab=0$

(2) $\det A=\begin{vmatrix}a&b\\-b&a\end{vmatrix}=a^2+b^2\neq0$ 必 有 反 矩 陣

(3) $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

故 $A^3=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$

(4) $A^2=\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}a^2-b^2&2ab\\-2ab&a^2-b^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

故 $\begin{cases}a^2=b^2\\ab=\frac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{\sqrt2}\\b=\frac{-1}{\sqrt2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{-1}{\sqrt2}\\b=\frac{1}{\sqrt2}\end{cases}$

(5)經變換後面積爲原來 $|\det A|$ 倍，又 $\det A=a^2+b^2\geq0$

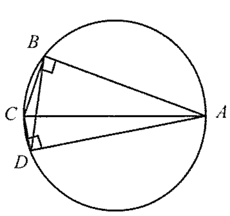
故 $\det A=4$

三、選填題

A. $V_1=\left\|\begin{matrix}1&0&2\\3&2&1\\1&-2&0\end{matrix}\right\|=14$ ；$V_1,V_2,V_3,\cdots$ 構成公比爲 $\frac{1}{8}$ 的等比數列，

故 $\sum_{n=1}^{\infty}V_n=\frac{14}{1-\frac{1}{8}}=16$

B. 由正弦定理，$\frac{\overline{BD}}{\sin45^\circ}=\overline{AC}\Rightarrow\overline{AC}=10\sqrt{2}$



$\because\angle CBA=90^\circ$ ，$\angle CDA=90^\circ$

$\therefore\overline{AB}=\overline{AC}\cos\alpha$ ，$\overline{AD}=\overline{AC}\cos\beta$

$$\frac{\Delta ABC\text{面積}}{\Delta ACD\text{面積}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\overline{AD}\times\overline{AC}\sin\beta}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AC}\cos\alpha\times\overline{AC}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\overline{AC}\cos\beta\times\overline{AC}\sin\beta}$$

$=\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\beta\sin\beta}=\frac{\sin2\alpha}{\sin2\beta}=2$

$\Rightarrow\sin2\alpha=2\sin2\beta=2\sin(90^\circ-2\alpha)=2\cos2\alpha$

$\Rightarrow\tan2\alpha=2\Rightarrow\sin2\alpha=\frac{2\sqrt5}{5}$

故 ΔABC 面積 $=\frac{1}{4}\overline{AC}^2\sin2\alpha=\frac{1}{4}\times200\times\frac{2\sqrt5}{5}=20\sqrt5$

第貳部分：非選擇題

一. 1. 最大值 $\frac{9}{4}$ ；2. $a=2\sqrt2,b=\frac{\pi}{4},c=3$ ；3. 5

1. 設 $P(2\cos\theta,2\sin\theta)$ ，$Q(2\cos2\theta,2\sin2\theta)$

則 $S(2\cos\theta,0)$ ，$T(2\cos2\theta,0)$ ，$\overline{ST}=2\cos\theta-2\cos2\theta$ (2 分)

$=2\cos\theta-2(2\cos^2\theta-1)=-4\cos^2\theta+2\cos\theta+2$

$=-4(\cos\theta-\frac{1}{4})^2+\frac{9}{4}$ (2 分)，又 $\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ ，$0\leq\cos\theta\leq\frac{\sqrt2}{2}$

故當 $\cos\theta=\frac{1}{4}$ ，$\overline{ST}$ 有最大值 $\frac{9}{4}$ (2 分)

2.直線 BP 方程式爲 $y-2\sin\theta=-1(x-2\cos\theta)$

故 $B(0,2\sin\theta+2\cos\theta)$ (1 分)，M 爲 $\overline{OP}$ 中點，故 $M(\cos\theta,\sin\theta)$

$\overline{BM}^2=(\cos\theta)^2+(-\sin\theta-2\cos\theta)^2$ (1 分)

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta$

$=1+2\sin2\theta+4\times\frac{1+\cos2\theta}{2}=3+2\sin2\theta+2\cos2\theta$

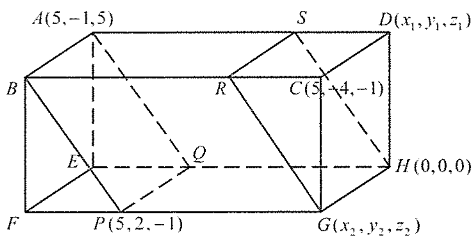
$=3+2\sqrt2\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})$

故 $a=2\sqrt2,b=\frac{\pi}{4},c=3$ (2 分)

3. $\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ ，$\frac{3\pi}{4}\leq2\theta+\frac{\pi}{4}\leq\frac{5\pi}{4}$ ，故 $\frac{-\sqrt2}{2}\leq\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})\leq\frac{\sqrt2}{2}$

因此 $\overline{BM}^2=3+2\sqrt2\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})\leq3+2\sqrt2\times\frac{\sqrt2}{2}=5$ (2 分)

二. 1. $\vec{a}=(3,0,-3),\vec{b}=(3,3,3),\vec{c}=(2,-4,2)$ ；2. $x+2y+z=0$ ；3. $\frac{4\sqrt6}{3}$



1. 設 $\overrightarrow{HG}=\vec{a}$ ，$\overrightarrow{HE}=\vec{b}$ ，$\overrightarrow{HD}=\vec{c}$

則 $\begin{cases}\vec{a}+\vec{c}=(5,-4,-1)\\\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}=(5,2,-1)\\\vec{b}+\vec{c}=(5,-1,5)\end{cases}$ (2 分)，得 $\begin{cases}\vec{a}=(3,0,-3)\\\vec{b}=(3,3,3)\\\vec{c}=(2,-4,2)\end{cases}$ (3 分)

2. $\overrightarrow{HS}=\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}=(3,-3,3)$

$\overrightarrow{HS}\times\overrightarrow{HG}=(3,-3,3)\times(3,0,-3)=(9,18,9)$ (2 分)

故平面 $HGRS$ 方程式爲 $x+2y+z=0$ (2 分)

3.解一：平面 $ABPQ$ 平行於平面 $HGRS$

故平面 $ABPQ$ 方程式爲 $x+2y+z=8$ (1 分)

則兩平面距離爲 $\frac{|8-0|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{4\sqrt6}{3}$ (2 分)

解二：$\because$平面 ABPQ 平行平面 HGRS

$\therefore$d(平面 ABPQ,平面 HGRS) = d(P,平面 HGS)

$=\frac{|5+4-1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{4\sqrt6}{3}$ (3 分)