

101 學年度高級中學 指定科目模擬考試

數學乙

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全、選修數學乙（全）

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內畫記，修正時應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，並標明題號。請在規定之欄位以筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。更正時，可以使用修正帶（液）。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一) 單選題及多選題只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 - , ± , 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1) 3 (2) 5 (3) 7 (4) 9 (5) 11，而考生得到的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 畫記（注意不是 7），如：

		解 答 欄											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
1		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 5 題為多選題，而考生認為正確的選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡第 5 列的 與 畫記，如：

5		<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
---	--	-------------------------------------	--------------------------	-------------------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

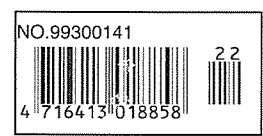
(二) 選填題的題號是 A, B, C, …，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分

別在答案卡的第 20 列的 與第 21 列的 畫記，如：

20		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

祝考試順利



版權所有 · 翻印必究

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 74 分）

一、單選題（18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 某甲向銀行借貸 600 萬元買房子，以分期付款每月月底償還相同的金額，20 年還清，銀行貸款月利率 0.3%，每月複利一次，試問每月大約須償還的金額最接近下列何者？

($\log 1.003 \approx 0.0013$, $10^{0.312} \approx 2.05$)

- (1) 25000 元
 - (2) 32000 元
 - (3) 35000 元
 - (4) 38000 元
 - (5) 40000 元
2. 為了調查抽菸者是否患有肺癌，在 95% 的信心水準下，抽樣調查 1100 位抽菸者得抽樣誤差為 3.2 個百分點。為了慎重起見，對同樣的群眾再做一次抽樣調查，在相同的信心水準下，抽樣人數增加為原來的 4 倍，所得的抽樣誤差變為 α ，則下列何者正確？
- (1) $\alpha \geq 3.2\%$
 - (2) $1.6\% < \alpha < 3.2\%$
 - (3) $\alpha = 1.6\%$
 - (4) $0 < \alpha < 1.6\%$
 - (5) 條件不足，無法判斷

3. 設 $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} - \frac{1}{24} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+2n}$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ，若 m 是滿足

$|S_n - S| < 0.001$ 的最小正整數，則 m 值為何？

- (1) 20
- (2) 21
- (3) 22
- (4) 23
- (5) 24

二、多選題 (24 分)

說明：第 4 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

4. 坐標平面上，已知 $A(3, 4)$ ， $B(-1, 7)$ ，若向量 $\vec{a} = \vec{OA}$ ， $\vec{b} = \vec{OB}$ (O 表原點)，

則下列何者正確？

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 25$
- (2) 向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 的長度為 $5 + 5\sqrt{2}$
- (3) $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$
- (4) 點 A 到直線 OB 的距離為 $\frac{5}{2}$
- (5) $\triangle OAB$ 的面積為 $\frac{25}{2}$

5. 某養殖場專養龍膽石斑魚。今天從飼養池中撈出 10 隻龍膽石斑，並將其編號後測量身長及重量。阿武測量這 10 隻魚，得知身長 (X) 平均為 A 公分，身長標準差為 B 公分；重量 (Y) 平均為 C 公斤，重量標準差為 D 公斤，相關係數 r_{XY} 。阿明測量這 10 隻魚，得知身長 (X') 平均為 P 公尺，身長標準差為 Q 公尺；重量 (Y') 平均為 R 台斤，重量標準差為 S 台斤，相關係數 $r_{X'Y'}$ 。2 人對每隻魚所測得之重量、身長均相同，僅因使用的單位不同，而有數字上的差異。(1 台斤 = 0.6 公斤) 試判斷下列選項何者正確？

(1) $\frac{A}{P} = \frac{B}{Q}$

(2) $D > S$

(3) $r_{XY} = r_{X'Y'}$

(4) 若將測量後最輕的一隻魚淘汰放回池中，剩下的九隻魚重量平均數為 C' 公斤，則 $C' \geq C$

(5) 若將測量後最輕的一隻魚淘汰放回池中，剩下的九隻魚重量標準差為 D' 公斤，則 $D' < 0$

6. 若 $f(x)$ 為三次多項式，且知 $(x^2 - 9)f(x)$ 除以 $x^2 - 3x - 10$ 得餘式為 $4x + 8$ ，則下列敘述何者正確？

(1) $f(-3) = 0$

(2) $f(-2) < 0$

(3) $f(5) > 0$

(4) $f(x) = 0$ 至少有一有理根

(5) $(x-1)f(x)$ 除以 $x-5$ 得餘式為 7

三、選填題 (32 分)

說明：第 A. 題至第 D. 題為選填題。將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (7-16) 內。每一題完全答對得 8 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 火柴棒可排成數字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 等十個數字如下圖：



若以 12 根火柴棒排成三位數 (百位數字不可為 0, 例如： $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array}$ 使用火柴棒數有 $2+3+7=12$ 根)，數字「不可」重複，共有 ⑦⑧ 種排法。

B. 一袋中有 8 張相同大小的紙牌，其中 2 張的兩面均為 A ，3 張的兩面均為 K ，其餘 3 張均為一面 A ，一面 K 。今 Jean 將手伸入袋中抽出 2 張紙牌平放在桌上，發現 2 張紙牌朝上之面均為 K ，則此 2 張紙牌的另一面均為 A 的機率為 $\frac{\textcircled{9}}{\textcircled{10}\textcircled{11}}$ 。

C. 令 $a = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$ ， b 為 a 的小數部分。若有一個無窮等比級數的和為 a ，其公比為 b ，則此級數的首項為 ⑫。

D. 某公司舉辦年終尾牙餐會，會中安插了一項抽獎活動。在抽獎箱中放入一副 52 張的撲克牌，每人每次抽出一張牌，且抽後放回，如此抽了三次；三次都抽到紅心者給獎金 9000 元，恰抽到兩次紅心者給獎金 6000 元，而恰抽到一次紅心者給 2000 元的獎金，三次都抽不到紅心者給獎金 1000 元。假設每張牌被抽到的機率相等，那麼每人抽到獎金的期望值為 ⑬⑭⑮⑯ 元。

第貳部分：非選擇題（占 26 分）

說明：本部分共有二大題計算題，答案務必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、(3)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每題配分標於題末。

一、桌上有兩個袋子，甲袋中有 3 個 10 元硬幣，乙袋中有 1 個 50 元硬幣。從甲袋中取出一個硬幣放入乙袋，再從乙袋中取一個硬幣放回甲袋（每個硬幣被取到的機會均等），這樣稱為交換一次。設原來甲袋中有 50 元硬幣的機率為 a_0 ，沒有 50 元硬幣的機率為 b_0 ，交換 n 次後甲袋中有 50 元硬幣的機率為 a_n ，沒有 50 元硬幣的機率為 b_n ， $n \in \mathbb{N}$ 。若二階方陣 A 滿

足 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$ ，試解出下列各小題。

- (1) 求二階方陣 $A = ?$ （4 分）
- (2) 求 $a_3 = ?$ （4 分）
- (3) 設 n 次交換後乙袋中硬幣金額的期望值為 E_n 元，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = ?$ （5 分）

二、在一個牽涉到兩個未知量 x, y 的線性規劃作業中，有三個限制條件。坐標平面上符合這三個限制條件的區域是一個三角形區域 ABC （含邊界及內部）。已知目標函數 $f(x, y) = ax + by$ （ a, b 是常數），在此三角形的一個頂點 $A(12, 5)$ 取得最大值 46，而在另一個頂點 $B(6, 3)$ 取得最小值 24，現因業務需要，加入第四個限制條件，結果符合所有限制條件的區域變成一個四邊形區域 $BCDE$ ，其中 D, E 之坐標分別為 $(7, 6)$ 和 $(9, 4)$ 。試求：

- (1) 數對 $(a, b) = ?$ （3 分）
- (2) 新加的第四個限制條件為何？（以 x, y 之二元一次不等式表示）（4 分）
- (3) 若在這四個限制條件下 $f(x, y) = ax + by$ 的最大值 M ，最小值 m ，則數對 $(M, m) = ?$ （6 分）

數學考科詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數與對數的應用

解析：設每月償還 x 元

$$\Rightarrow 600 \times 1.003^{240} \text{ (萬元)} = x (1.003^{239} + 1.003^{238} + 1.003^{237} + \cdots + 1.003^2 + 1.003 + 1)$$

$$\therefore 600 \times 1.003^{240} \text{ (萬元)} = x (1 + 1.003 + 1.003^2 + \cdots + 1.003^{239}) = \frac{x \cdot (1.003^{240} - 1)}{1.003 - 1}$$

$$\text{令 } \alpha = 1.003^{240} \quad \therefore \log \alpha = \log 1.003^{240} = 240 \log 1.003 \approx 240 \times 0.0013 = 0.312$$

$$\therefore \alpha = 10^{0.312} \approx 2.05 \Rightarrow 600 \times 2.05 \text{ (萬元)} = \frac{x \cdot (2.05 - 1)}{1.003 - 1} = \frac{1.05x}{0.003} = 350x$$

$$\therefore \text{每月償還 } x = 600 \times 2.05 \div 350 \text{ (萬元)} \approx 35143 \text{ 元}$$

故選(3)。

2. (5)

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計II〉

目標：抽樣誤差的概念

解析：兩次抽樣的 \hat{p} 必須相同的情況下，抽樣人數增加為原來的 4 倍，所得的抽樣誤差減半。

本題之兩次抽樣的 \hat{p} 未必相同，故條件不足，無法判斷。

故選(5)。

3. (2)

出處：選修數學乙(下)第一章〈極限與函數〉

目標：能利用極限求無窮級數和

$$\text{解析：} \because \frac{1}{n^2 + 2n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - (-1)^{n-2} \frac{1}{n+1} - (-1)^{n-1} \frac{1}{n+2} \right]$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{1}{4}$$

$$\therefore |S_n - S| < 0.001, S = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) < 0.001$$

故 $n \geq 21$ ，因此 $m = 21$

故選(2)。

二、多選題

4. (1)(3)(5)

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：平面向量的計算

$$\text{解析：(1) } \circ : \vec{a} \cdot \vec{b} = (3, 4) \cdot (-1, 7) = -3 + 28 = 25$$

$$(2) \times : \vec{a} + \vec{b} \text{ 的長度為 } |\vec{a} + \vec{b}| = |(3, 4) + (-1, 7)| = |(2, 11)| = \sqrt{4+121} = 5\sqrt{5}$$

$$(3) \circ : |\vec{a} - \vec{b}| = |(3, 4) - (-1, 7)| = |(4, -3)| = \sqrt{16+9} = 5$$

$$(4) \times : \text{點 } A \text{ 到直線 } OB \text{ 的距離} = \triangle OAB \text{ 的高} = \frac{25}{2} \times 2 \div \overline{OB} = 25 \div 5\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$(5) \circ : \triangle OAB \text{ 的面積為 } \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} \right| = \frac{25}{2}$$

故選(1)(3)(5)。

5. (1)(3)(4)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：數據線性平移及刪除後的前後統計量關係

解析：定理：若 $W=aX+b$ ， $Z=cY+d$ ，

則：1. $\mu_W=a\mu_X+b$ ， $\sigma_W=a\sigma_X$

$$2. r_{ZW} = \frac{ac}{|ac|} r_{XY}$$

已知 $X'=0.01X$ ， $Y'=\frac{5}{3}Y$

所以 $P=0.01A$ ， $Q=0.01B$ ， $R=\frac{5}{3}C$ ， $S=\frac{5}{3}D$

(1) ○

(2) ×： $S>D$

(3) ○： $r_{XY}=r_{X'Y'}$

(4) ○：10 隻魚重量由小至大排列，得 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{10}$

$$\begin{aligned} C'-C &= \frac{\sum_{i=2}^{10} x_i}{9} - \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} \\ &= \frac{1}{90} [(10x_2+10x_3+10x_4+\dots+10x_{10}) - (9x_1+9x_2+9x_3+\dots+9x_{10})] \\ &= \frac{1}{90} (x_2+x_3+x_4+\dots+x_{10}-9x_1) \\ &= \frac{1}{90} [(x_2-x_1) + (x_3-x_1) + \dots + (x_{10}-x_1)] \geq 0 \quad (\because x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{10}) \end{aligned}$$

故 $C' \geq C$

(5) ×：例 1：

若 10 隻魚重量數字為 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,

此時 $D>0$

但是淘汰之後，重量數字均為 2， $D'=0$

例 2：

若 10 隻魚重量數字為 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2,

$$D = \sqrt{0.09} < D' = \sqrt{\frac{8}{81}}$$

故在不知道原先數據下，刪除一筆資料，前後之標準差大小無法確定

故選(1)(3)(4)。

6. (3)(4)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式函數與餘式定理的應用

解析：∵ $(x^2-9)f(x)$ 除以 $x^2-3x-10$ 得餘式為 $4x+8$

$$\text{令除法所得的商式為 } p(x) \Rightarrow (x^2-9)f(x) = p(x)(x-5)(x+2) + 4x+8$$

$$\therefore ((-2)^2-9)f(-2) = -5f(-2) = p(-2) \times (-7) \times 0 + 4 \times (-2) + 8 = 0$$

$$\Rightarrow f(-2) = 0$$

$$(5^2-9)f(5) = 16f(5) = p(5) \times 0 \times 7 + 4 \times 5 + 8 = 28$$

$$\Rightarrow f(5) = \frac{7}{4}$$

依餘式定理 $(x-1)f(x)$ 除以 $x-5$ 得餘式為 $(5-1)f(5) = 4f(5) = 7$

∴(1) ×，(2) ×，(3) ○，(4) ○，(5) ○

故選(3)(4)(5)。

三、選填題

A. 58

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：排列組合的應用

解析：

數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
火柴數目	6	2	5	5	4	5	6	3	7	6

$2+3+7=12 \Rightarrow$ 以 1, 7, 8 三個數字所排成之三位數共有 $3!=6$ 種

$2+4+6=12 \Rightarrow$ 以 1, 4, (0, 6, 9) 三個數字所排成之三位數共有 16 種：
140 \Rightarrow 4 種；146 $\Rightarrow 3!=6$ 種；149 $\Rightarrow 3!=6$ (種)

$3+4+5=12 \Rightarrow$ 以 7, 4, (2, 3, 5) 三個數字所排成之三位數共有 18 種，
即 $C_1^3 \times 3! = 18$ (種)

$2+5+5=12 \Rightarrow$ 以 1, (2, 3, 5), (2, 3, 5) 三個數字所排成之三位數共有
 $C_2^3 \times 3! = 18$ (種)

$\therefore 6+16+18+18=58$ (種)。

B. $\frac{1}{11}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率應用

解析：朝上之面均為 K 有三種狀況：

(1) 三張雙面 K 被抽出 2 張且 K 面朝上的機率 $p_1 = \frac{C_2^3}{C_2^8} \times 1 = \frac{3}{28} = \frac{12}{112}$

(2) 三張單面 K 被抽出 2 張且 K 面朝上的機率 $p_2 = \frac{C_2^3}{C_2^8} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{112}$

(3) 三張單面 K ，三張雙面 K 各被抽出 1 張且 K 面朝上的機率 $p_3 = \frac{C_1^3 C_1^3}{C_2^8} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{56} = \frac{18}{112}$

所以 P (朝下之面均為 A | 朝上之面均為 K) 為 $\frac{p_2}{p_1+p_2+p_3} = \frac{1}{11}$ 。

C. 1

出處：第一冊第一章〈數與式〉、選修數學乙(下)第一章〈極限與函數〉

目標：能夠解開雙重根號，並利用無窮等比級數的公式求解

解析： $a = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{14+2\sqrt{45}}{4}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2. \dots\dots$

$\therefore b = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

設首項為 x ，則 $\frac{x}{1-b} = a$ ($\because -1 < b < 1$)

$\Rightarrow x = a(1-b) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1$ 。

D. 2250

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計 II〉

目標：二項分布與期望值的應用

解析：令 X 表示抽出紅心的次數，因每次抽到紅心的機率為 $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ ，

故 $P(X=0) = C_0^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$ ， $P(X=1) = C_1^3 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$ ，

$P(X=2) = C_2^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{64}$ ， $P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

\therefore 獎金的期望值為 $1000 \times \frac{27}{64} + 2000 \times \frac{27}{64} + 6000 \times \frac{9}{64} + 9000 \times \frac{1}{64} = 2250$ (元)。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; (2) $\frac{13}{18}$; (3) 20

出處：第四冊第三章〈矩陣〉、選修數學乙(上)第一章〈機率統計II〉

目標：能夠寫出轉移矩陣，並使用它求機率，及達到穩定狀態時之期望值

解析：(1) 設在甲袋中有 50 元為狀態 P ，沒有 50 元為狀態 Q ，

所以，在甲袋中交換一次，

$$\text{狀態 } P \rightarrow \text{狀態 } P \text{ 的機率為 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{5}{6}$$

$$\text{狀態 } P \rightarrow \text{狀態 } Q \text{ 的機率為 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\text{狀態 } Q \rightarrow \text{狀態 } P \text{ 的機率為 } 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{狀態 } Q \rightarrow \text{狀態 } Q \text{ 的機率為 } 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$(2) \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = A^3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{18} \\ \frac{5}{18} \end{bmatrix} \Rightarrow a_3 = \frac{13}{18}.$$

(3) 假設達穩定狀態時 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y$ ，

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ 且 } x+y=1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}y = x \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}y = y \end{cases} \text{ 且 } x+y=1$$

$$\Rightarrow x=3y \text{ 且 } x+y=1 \Rightarrow x=\frac{3}{4}, y=\frac{1}{4}$$

故達穩定狀態時，乙袋有一個 10 元硬幣的機率為 $\frac{3}{4}$ ，有一個 50 元硬幣的機率為 $\frac{1}{4}$ ，故乙袋中硬

幣的期望值為 $\frac{3}{4} \times 10 + \frac{1}{4} \times 50 = 20$ 元；

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 20$ 。

二、(1) (3, 2) ; (2) $x+y \leq 13$; (3) (35, 24)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃的應用

解析：(1) 在 (12, 5) 取得最大值 46 $\Rightarrow 12a+5b=46$ ①

在 (6, 3) 取得最小值 24 $\Rightarrow 6a+3b=24$ ②

由①、②解出 $a=3, b=2$

故數對 $(a, b) = (3, 2)$ 。

(2) $\because \overline{DE}$ 之方程式為 $x+y=13$

\therefore 第四個限制條件為 $x+y \leq 13$ 。

(3) 目標函數為 $3x+2y$

加上第四個限制條件後，圖形如右

所以最大值 M 發生在 $E(9, 4)$ ，最大值為 35，

最小值 m 發生在 $B(6, 3)$ ，最小值為 24，

故數對 $(M, m) = (35, 24)$ 。

