數學甲

101 學年度高級中學
指定科目模擬考試
數學甲

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全、選修數學甲（全）

考試時間：80 分鐘

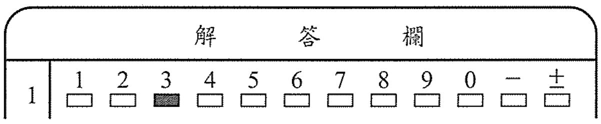
作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內畫記，修正時應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，並標明題號。請在規定之欄位以筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。更正時，可以使用修正帶（液）。

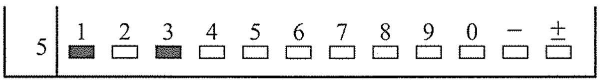
第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一) 單選題及多選題只用 1，2，3，4，5 等五個格子，而不需要用到－，±，以及 6，7，8，9，0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1) 3 (2) 5 (3) 7 (4) 9 (5) 11，而考生得到的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 $\underset{\sqcup}{3}$ 畫記（注意不是 7），如：

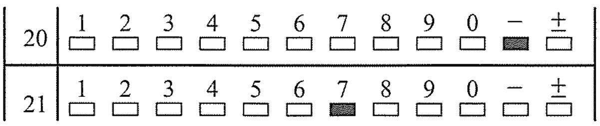


例：若第 5 題為多選題，而考生認為正確的選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡第 5 列的 $\underset{\sqcup}{1}$ 與 $\underset{\sqcup}{3}$ 畫記，如：



(二) 選填題的題號是 A.，B.，C.，…，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。

例：若第 C. 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\underset{\sqcup}{-}$ 與第 21 列的 $\underset{\sqcup}{7}$ 畫記，如：



祝考試順利

NO.99300140
22
4716413018841

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 78 分）

一、單選題（18 分）

說明：第 1. 題至第 3. 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 銳角三角形 ABC 中，已知 $\overline{BC}=13$，$\overline{AC}=20$，$\sin A=\dfrac{3}{5}$，則 $\overline{AB}$ 的長度為何？

(1) $\dfrac{16}{3}$

(2) 11

(3) $\dfrac{56}{3}$

(4) 20

(5) 21

2. 袋中有編號 1 ～ 10 的號碼球各一顆，每一顆球被取出的機會均等。
甲從袋中每次取一球記錄號碼後放回，共取三次。設甲在第一球取到 n 號的前提之下，第二、三球至少有一個大於 n 號的機率為 $P(n)$。
乙從袋中每次取一球記錄號碼後不放回，共取三次。設乙在第一球取到 n 號的前提之下，第二、三球至少有一個大於 n 號的機率為 $Q(n)$。
則下列選項中的值何者最大？

(1) $P(7)$

(2) $P(8)$

(3) $Q(7)$

(4) $Q(8)$

(5) $\dfrac{1}{2}$

3. a，b，c，k 為實數，$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$，已知 $f(x)$ 在 $x=k$ 與 $x=-\frac{1}{k}$ 處均有極值。求 $f(1)-f(-1)$ 的值？

(1) -8
(2) -4
(3) 0
(4) 2
(5) 16

二、多選題（32 分）

說明：第 4.題至第 7.題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

4. 空間中，$O(0,0,0)$，$A(1,3,0)$，$B(0,3,2)$，則下列哪些選項中的點落在平面 OAB 上，且位於△OAB 內部（不含邊界）？

(1) $(1,6,2)$
(2) $(\frac{1}{3},2,\frac{2}{3})$
(3) $(\frac{1}{4},\frac{3}{2},1)$
(4) $(\frac{2}{3},\frac{11}{4},\frac{1}{2})$
(5) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{2}{3})$

5. 設 a，b，c，d 為實數，$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，在坐標平面上所有的點 $P(x,y)$ 都滿足關係式 $A^2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，則下列選項中的 A，何者必定滿足條件？

(1) $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

(3) $A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

(4) $A=\begin{bmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{t^2-1}{1+t^2} \end{bmatrix}$，其中 t 為實數

(5) $A=\begin{bmatrix} s & t \\ 1-s & 1-t \end{bmatrix}$，其中 s，t 為小於 1 的正實數

6. 考慮多項式 $f(x)=x^2+kx+4$，其中 k 為實數，已知虛數 α 為方程式 $f(x)=0$ 的一個解。下列選項何者正確？

(1) $f(x)$ 有最小值且此最小值大於 0

(2) k 不可能為 $3\sqrt{2}$

(3) 設 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$，則在 xy 坐標平面上，$g(x)$ 之圖形恰有一個反曲點且反曲點位於 $x=-\frac{k}{2}$ 處

(4) 若 $k=0$，則在 xy 坐標平面上，$y=f(x)$ 圖形上的動點 P 與點 $A(0,\frac{11}{2})$ 的距離之最小值為 $\frac{3}{2}$

(5) $|\alpha|$ 必定小於 3

7. a_i，b_i，c_i，d_i 皆為實數，其中 $i=1$，2，3。在坐標空間中，已知三元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 的解（x,y,z）形成的圖形是通過（0,0,0）、（6,4,2）兩點的直線，請選出正確的選項。

(1)向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,b_1,c_1)$ 與 $\overrightarrow{b}=(3,2,1)$ 互相平行

(2)平面 $3x+2y+z=1$ 不可能包含點 (a_1,b_1,c_1)

(3)由三向量 $\overrightarrow{u}=(a_1,b_1,c_1)$，$\overrightarrow{v}=(a_2,b_2,c_2)$，$\overrightarrow{w}=(a_3,b_3,c_3)$ 所展成的平行六面體的體積為 0

(4) $x=3$，$y=2$ 是二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$ 的一組解

(5)二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$ 的解有無限多組

三、選填題（28 分）

說明：第 A. 題至第 D. 題為選填題。將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（8－14）內。每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 坐標平面上，點 $A(0,0)$，$B(2,-5)$，$C(-2,-5)$，$D(3,4)$，已知動點 P 滿足 $\overrightarrow{PD}\perp\overrightarrow{AD}$，動點 Q 滿足 $\overrightarrow{QB}\perp\overrightarrow{QC}$，求 $\overline{PQ}$ 之最小值為 ____⑧____。

B. a，b，c，t 為實數且 a，b，c 皆大於 1，已知 $a^t = b^{t+1} = c^{t+4} = 10$，且 $\log a + \log b + \log c = 1$，則 $t^2 + 4t =$ ___⑨⑩___ 。

C. 函數 $f(x) = \sqrt{-3x^2 + 6x + 9}$，在坐標平面上，設 $y = f(x)$ 之圖形與 x 軸所圍成的區域為 A，則將 A 繞 x 軸旋轉一圈所得的旋轉體體積為___⑪⑫___ π 。

D. 袋中有 m 顆紅球，n 顆白球（其中 m，n 為正整數且 $1 \leq m \leq 9$，$1 \leq n \leq 9$），每顆球由袋中被取出的機會均等。有一個遊戲，其規則為：由袋中每次取一球，記錄取出的球的顏色之後將球放回袋中，共取三次，若三次之中有 k 次是紅色（另外 $(3-k)$ 次是白色，其中 $k = 0, 1, 2, 3$），則得分為 $(8k-6)$ 分。已知此遊戲得分的期望值為 4 分，則 $m =$ ___⑬___ ，$n =$ ___⑭___ 。

第貳部分：非選擇題（占 22 分）

說明：本部分共有二大題計算證明題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、(3)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每題配分標於題末。

一、 a，b，c 為實數，$0 \le x < 2\pi$，已知 $f(x) = a\sin x + b\cos x + c$ 的最大值為 3，最小值為 -1，且最大值發生在 $x = \dfrac{11\pi}{6}$ 時。

(1) 分別求出 a，b，c 的值。（7 分）

(2) $(a+bi)^7 = ?$（4 分）

二、數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n = \dfrac{n^2-1}{(n+1)!}$，其中 n 為正整數，$(n+1)! = 1 \times 2 \times \cdots\cdots \times (n+1)$。設 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，因此 $S_1 = a_1 = 0$，$S_2 = a_1 + a_2 = \dfrac{1}{2}$，……，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$。將 S_n 通分之後約分至最簡。

(1) 分別求出 S_3，S_4 的值。（4 分）

(2) 寫出 S_n 的一般式，並證明你的結論。（6 分）

(3) 求 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 之值。（1 分）

數學考科詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (5)

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：使用正弦定理、餘弦定理解題

解析：由正弦定理：$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}$，將 $\overline{BC}=13$，$\overline{AC}=20$，$\sin A=\dfrac{3}{5}$ 代入可解得 $\sin B=\dfrac{12}{13}$

又$\triangle ABC$為銳角三角形，故 $\cos A=\dfrac{4}{5}$，$\cos B=\dfrac{5}{13}$

$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{63}{65}$

再一次正弦定理：$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$，代入可解得 $\overline{AB}=21$

故選(5)。

〈另解〉

設 $\overline{AB}=x$，由餘弦定理可得：$13^2=20^2+x^2-2\cdot 20\cdot x\cdot\dfrac{4}{5}$，解得 $x=11$ 或 21

又若 $x=11$，則因為 $20^2>13^2+11^2$，得到 $\angle B$ 為鈍角，不合。因此 $x=21$

故選(5)。

2. (3)

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率的概念、機率的計算

解析：由題意可理解：若 n 越大，則抽到比 n 大的號碼的機率將越小，

因此 $P(8)<P(7)$，$Q(8)<Q(7)$。

而 $P(7)=1-\dfrac{7\times 7}{10\times 10}=\dfrac{51}{100}$，$Q(7)=1-\dfrac{6\times 5}{9\times 8}=\dfrac{7}{12}$，

故 $Q(7)$ 最大，選(3)。

3. (1)

出處：第一冊第二章＜多項式函數＞、選修數學甲(下)第二章＜多項式函數的微積分＞

目標：多項式函數極值的概念、根與係數的關係

解析：$f'(x)=6x^2+2ax+b$，因為 $f(x)$ 的極值發生在 $f'(x)=0$ 時，

由根與係數的關係，$k\times(-\dfrac{1}{k})=\dfrac{b}{6}$，得 $b=-6$

因此 $f(x)=2x^3+ax^2-6x+c$

所求 $f(1)-f(-1)=(2+a-6+c)-(-2+a+6+c)=-8$

故選 (1)。

二、多選題

4. (2)(4)

出處：第三冊第三章〈平面向量〉、第四冊第一章〈空間向量〉

目標：向量的線性組合表示法

解析：設每一選項中的點為 P，

P 在$\triangle OAB$ 內部（不含邊界）$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=s\cdot\overrightarrow{OA}+t\cdot\overrightarrow{OB}$ 且 $\begin{cases}s>0，t>0\\ s+t<1\end{cases}$

$\overrightarrow{OA}=(1,3,0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,3,2)$，

因此 $\overrightarrow{OP}=s\cdot\overrightarrow{OA}+t\cdot\overrightarrow{OB}=(s,3s+3t,2t)$

對照 x 坐標與 z 坐標驗證得：

(1) ×：$(1,6,2)=(s,3s+3t,2t)\Rightarrow s=1$，$t=1$，因為 $s+t>1$，因此不合

(2) ○：$(\frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}) = (s, 3s+3t, 2t) \Rightarrow s=\frac{1}{3}$，$t=\frac{1}{3}$，合於所求

(3) ×：$(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, 1) = (s, 3s+3t, 2t) \Rightarrow s$，$t$ 無解

(4) ○：$(\frac{2}{3}, \frac{11}{4}, \frac{1}{2}) = (s, 3s+3t, 2t) \Rightarrow s=\frac{2}{3}$，$t=\frac{1}{4}$，合於所求

(5) ×：$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}) = (s, 3s+3t, 2t) \Rightarrow s=\frac{1}{2}$，$t=-\frac{1}{3}<0$，不合

故選(2)(4)。

5. (1)(3)(4)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣的乘法、平面上的線性變換

解析：將 $x=1$，$y=0$ 以及 $x=0$，$y=1$ 分別代入關係式中可得知 $A^2=I$

又從線性變換的觀點，經過 A 作兩次線性變換後，所有的點會回到原來位置，

因此 A 至少有以下幾種可能：

$A=I$（不動變換），

$A=-I$（對稱於原點或可視為繞原點旋轉 180° 之變換），

$A=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$（鏡射變換）

(1) ○：$A=-I$

(2) ×：A 為旋轉 -30° 之變換

(3) ○：A 為 $\theta=-15^\circ$ 之鏡射變換

(4) ○：$\because (\frac{1-t^2}{1+t^2})^2+(\frac{2t}{1+t^2})^2=1$，因此可令 $\frac{1-t^2}{1+t^2}=\cos 2\theta$，$\frac{2t}{1+t^2}=\sin 2\theta$，則

$$A=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

(5) ×：若 a，b，c，d 都大於 0，則 A^2 不可能等於 I

故選(1)(3)(4)。

〈另解〉

此題亦可針對每一選項直接計算 A^2，檢查是否等於 I。

6. (1)(2)(3)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉、選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：虛根成對定理、根與係數的關係、多項式方程式的解、微積分基本定理、反曲點的概念、複數絕對值的概念、配方法求極值

解析：(1) ○：由題意知 $f(x)=0$ 有兩虛根，因此拋物線 $y=f(x)$ 之圖形與 x 軸沒有交點，

又其開口向上，因此其最低點（頂點）在 x 軸上方，故 $f(x)$ 之最小值大於 0

(2) ○：由判別式小於 0 可得 $-4<k<4$，因此 k 不可能為 $3\sqrt{2}$

(3) ○：因為 $g'(x)=f(x)$，因此 $g''(x)=f'(x)=2x+k$。當 $x>-\frac{k}{2}$ 時，$g''(x)>0$；

當 $x<-\frac{k}{2}$ 時，$g''(x)<0$。因此反曲點在 $x=-\frac{k}{2}$ 處

(4) ×：設圖形上的動點 $P(a, b)$，則 $a^2=b-4$，

$$\overline{PA}=\sqrt{a^2+(b-\frac{11}{2})^2}=\sqrt{b-4+b^2-11b+\frac{121}{4}}=\sqrt{(b-5)^2+\frac{5}{4}}\geq\sqrt{\frac{5}{4}}$$

(5) ○：若虛數 α 為 $f(x)=0$ 的一根，則另一根為 $\overline{\alpha}$，由根與係數的關係，$\alpha \cdot \overline{\alpha}=4$，

因此 $|\alpha|^2=4$，$|\alpha|=2$

故選(1)(2)(3)(5)。

7. (2)(3)(4)

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：方程組的幾何意義、克拉瑪公式、空間向量的內積、三階行列式

解析：(1) ×：將（0 , 0 , 0）代入得 $d_1=d_2=d_3=0$。再將（6 , 4 , 2）代入得 $3a_1+2b_1+c_1=0$，故（3 , 2 , 1）·（a_1 , b_1 , c_1）＝0，兩向量互相垂直

(2) ○：若平面 $3x+2y+z=1$ 包含點（a_1 , b_1 , c_1），則 $3a_1+2b_1+c_1=1$。但已知 $3a_1+2b_1+c_1=0$，如此產生矛盾。因此平面 $3x+2y+z=1$ 不可能包含點（a_1 , b_1 , c_1）

(3) ○：方程組有無限多組解，因此 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$，

故由三向量所展成的平行六面體的體積為 $\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|=0$

(4) ○：將點（6 , 4 , 2）代入方程組得 $\begin{cases} 3a_1+2b_1+c_1=0 \\ 3a_2+2b_2+c_2=0 \\ 3a_3+2b_3+c_3=0 \end{cases}$，

因此 $x=3$，$y=2$ 代入方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$ 之中，等式成立

(5) ×：若方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$ 的解有無限多組，則三直線重合，三個等式的係數成比例，

因此三平面 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ 亦重合，與題意不符

故選(2)(3)(4)。

三、選填題

A. 7

出處：第三冊第二章<直線與圓>、第三冊第三章<平面向量>

目標：直線方程式、圓的方程式、點到直線的距離

解析：設 P（a , b），因為 $\overrightarrow{PD}\perp\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AD}$ ＝（$3-a$, $4-b$）·（3 , 4）＝0，得 $3a+4b=25$ 因此 P 在直線 L：$3x+4y-25=0$ 上（但 P，D 不重合）

設 Q（c , d），因為 $\overrightarrow{QB}\perp\overrightarrow{QC}$，所以 $\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QC}$ ＝（$2-c$，$-5-d$）·（$-2-c$，$-5-d$）＝0，

得 $c^2+(d+5)^2=4$

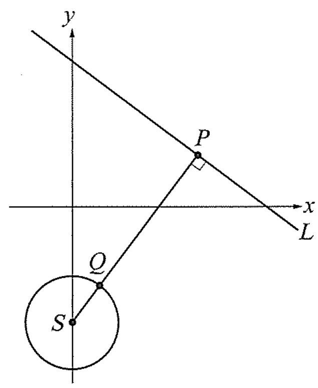
因此 Q 在圓 $x^2+(y+5)^2=4$ 上，其圓心為 S（0，-5），半徑為 2（但 Q 與 B，C 不重合）

由圖形之關係可知

$\overline{PQ}$ 之最小值為 "圓上的點 Q 與直線上的點 P 之距離的最小值"

＝（圓心 S 到直線 L 之垂直距離）－（圓的半徑）

$=\left|\dfrac{3\times0+4\times(-5)-25}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|-2=7$



（當 P，Q 距離最小時，S，P，Q 三點共線且 $\overline{SQ}\perp L$，因此 P，D 不重合，Q 與 B，C 不重合，符合題目條件）

B. 12

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數與對數的計算、多項式方程式的解

解析：$a=10^{\frac{1}{t}}$，$b=10^{\frac{1}{t+1}}$，$c=10^{\frac{1}{t+4}}$

所以 $\log a=\frac{1}{t}$，$\log b=\frac{1}{t+1}$，$\log c=\frac{1}{t+4}$

解 $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+4}=1$，得 $t^3+2t^2-6t-4=0$，

$\Rightarrow (t-2)(t^2+4t+2)=0 \Rightarrow t=2$，$-2\pm\sqrt{2}$

又 $10^{\frac{1}{t}}=a>1=10^0$

因此 $\frac{1}{t}>0$，故 $t=2$，$t^2+4t=12$。

C. 32π

出處：選修數學甲（下）第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：旋轉體的體積

解析：解 $-3x^2+6x+9\geq 0$ 得 $-1\leq x\leq 3$，

所求為 $\int_{-1}^{3}\pi(f(x))^2dx=\int_{-1}^{3}\pi(-3x^2+6x+9)\,dx=\pi(-x^3+3x^2+9x)\Big|_{-1}^{3}=\pi(27-(-5))=32\pi$。

D. 5；7

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計 II〉

目標：二項分布期望值的計算

解析：每次從袋中取到紅球的機率為 $\frac{m}{m+n}$

設 $p=\frac{m}{m+n}$，則每次從袋中取到白球的機率為 $\frac{n}{m+n}=1-p$

設 X 為三次之中紅球出現的次數，則機率 $P(X=k)=C_k^3p^k(1-p)^{3-k}$

得分的期望值

$=(-6)\cdot P(X=0)+2\cdot P(X=1)+10\cdot P(X=2)+18\cdot P(X=3)$

$=(-6)(1-p)^3+2\cdot 3p(1-p)^2+10\cdot 3p^2(1-p)+18p^3$

$=(-6)(1-3p+3p^2-p^3)+6p(1-2p+p^2)+30p^2(1-p)+18p^3$

$=(-6+18p-18p^2+6p^3)+(6p-12p^2+6p^3)+(30p^2-30p^3)+18p^3$

$=-6+24p$

因此 $-6+24p=4$，得到 $p=\frac{5}{12}=\frac{m}{m+n}$，$m:n=5:7$，

故 $m=5$，$n=7$。

〈另解〉

得分的期望值

$=\sum_{k=0}^{3}(8k-6)\cdot P(X=k)$

$=\sum_{k=0}^{3}8k\cdot P(X=k)+\sum_{k=0}^{3}(-6)\cdot P(X=k)$

$=8\cdot\sum_{k=0}^{3}k\cdot P(X=k)-6\cdot\sum_{k=0}^{3}P(X=k)$

$=8\cdot E(X)-6\cdot 1=8\cdot 3p-6=24p-6$

因此 $24p-6=4$，得到 $p=\frac{5}{12}=\frac{m}{m+n}$，$m:n=5:7$，

故 $m=5$，$n=7$。

第貳部分、非選擇題

一、(1) $a=-1$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$

(2) $-64+64\sqrt{3}\,i$

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：正、餘弦函數的疊合、複數的極式

解析：(1) $f(x)=a\sin x+b\cos x+c=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)+c$，其中 $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

最大值為 $\sqrt{a^2+b^2}+c=3$，最小值為 $-\sqrt{a^2+b^2}+c=-1$，

得 $\sqrt{a^2+b^2}=2$，$c=1$，

因此 $f(x)=2\sin(x+\alpha)+1$

又最大值發生在 $x=\dfrac{11\pi}{6}$ 時，此時 $x+\alpha=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，其中 k 為整數，

因此 $\dfrac{11\pi}{6}+\alpha=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，得 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi=-\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi$，

因此 $f(x)=2\sin\left(x-\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi\right)+1=2\sin\left(x-\dfrac{4\pi}{3}\right)+1$，

展開後得 $f(x)=2\left(\sin x\cos\dfrac{4\pi}{3}-\cos x\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)+1=-\sin x+\sqrt{3}\cos x+1$，

因此 $a=-1$，$b=\sqrt{3}$。

(2) $$(a+bi)^7=\left(2\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^7$$
$$=2^7\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^7$$
$$=128\left(\cos\frac{14\pi}{3}+i\sin\frac{14\pi}{3}\right)$$
$$=128\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=128\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-64+64\sqrt{3}i$$ 。

二、(1) $S_3=\dfrac{5}{6}$，$S_4=\dfrac{23}{24}$

(2) $S_n=1-\dfrac{1}{n!}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$

出處：選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉

目標：觀察並歸納級數的型式、求無窮級數的極限

解析：(1) $a_n=\dfrac{n^2-1}{(n+1)!}=\dfrac{(n-1)(n+1)}{n!\,(n+1)}=\dfrac{(n-1)}{n!}$，

$$S_3=S_2+a_3=\frac{1}{2}+\frac{2}{3!}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$
$$S_4=S_3+a_4=\frac{5}{6}+\frac{3}{4!}=\frac{20}{24}+\frac{3}{24}=\frac{23}{24}$$

(2) 猜測 $S_n=1-\dfrac{1}{n!}$

證明：

① $n=1$ 時，$1-\dfrac{1}{1!}=0=S_1$，等式成立。

② 設 $n=k$ 時，等式成立，即 $S_k=1-\dfrac{1}{k!}$，

則 $n=k+1$ 時，$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}=1-\dfrac{1}{k!}+\dfrac{k}{(k+1)!}=1-\dfrac{k+1}{(k+1)!}+\dfrac{k}{(k+1)!}=1-\dfrac{1}{(k+1)!}$，

等式亦成立。（3 分）

故由①、②及數學歸納法得證。（1 分）

〈另解〉

猜測 $S_n=1-\dfrac{1}{n!}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k!}-\frac{1}{k!}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}\right)+\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)$$

$$=\frac{1}{0!}-\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$$ ，得證。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n!}\right)=1$。